Beitrag zur Berechnung der Biegungsspannungen im Kabel versteifter Hängebrücken

---

Von der
Technischen Hochschule zu Breslau
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs
genehmigte

Dissertation

Vorgelegt von

Dipl.-Ing. Edmund Herrfeldt
aus München

Referent:
Professor Dr.-Ing. L. Mann

Korreferent:
Professor Dr.-Ing. K. Mayer

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Februar 1938

Spezialbetrieb für Dissertationsdruck von Robert Noske in Borna-Leipzig
1938

*41438

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Vorwort.

Den Gedanken zu dieser Arbeit erhielt ich während meiner Assistententätigkeit in München von Prof. Dr. Schachenmeier. Die endgültige Fassung entstand im Jahre 1937 auf Grund wertvoller Anregungen durch Herrn Prof. Dr.-Ing. Mann, dem ich hierfür meinen ergebensten Dank aussprechen möchte. Die in der Arbeit beschriebenen Biegeversuche wurden in der Versuchsanstalt für Mechanik und Statik der Baukonstruktionen an der Technischen Hochschule Breslau durchgeführt, wobei mir die Versuchseinrichtungen sowie die Mithilfe der Herren Assistenten, für die ich besonders danke, in entgegenkommender Weise zur Verfügung standen.

Das Kabelmaterial für den Modellversuch wurde mir von der Fa. A. Deichsel, Drahtwerke und Seilfabriken A.-G., Hindenburg (O. S.), geliefert und ich benutze gern die Gelegenheit ihr dafür bestens zu danken.

Ebenso gebührt der Firma Christoph & Unmack A.-G., Niesky (O. L.), mein Dank für die zur Verfügungstellung und Anfertigung der zur Durchführung der Versuche erforderlichen Kabelschellen und der Einspannvorrichtung.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 1

Allgemeines über Nebenspannungen in Bauwerken aus Stahl 1

Abschnitt I: Die Formänderung des Kabels durch die Verkehrslast 6

Abschnitt II: Bestimmung der Biegungsmomente im Kabel

A. Das Kabel als durchlaufender Träger 16

a) Ohne Berücksichtigung der Achsialkraft 16

b) Mit Berücksichtigung der Achsialkraft 20

c) Anwendung 25

B. Das eingespannte Kabelstück 27

Abschnitt III: Zahlenbeispiel 45

Anhang 58

Biegeversuche am Kabelmodell 64

Schlußbemerkung 73

Literaturverzeichnis.

Bohny, Hängebrücken, Beiträge zu ihrer Berechnung und Konstruktion.

Woernle, Zur Beurteilung der Drahtseilschwebebahnen für Personenbeförderung. Zeitschr. des Verbandes Deutscher Diplom-Ingenieure 1913 S. 479.

Isaachsen, Die Beanspruchung von Drahtseilen V.D.I. 07.

Findeis, Rechnerische Grundlagen des Baues von Drahtseilbahnen.

Hrabak, Die Drahtseile.

Altpeter, Die Drahtseile, ihre Konstruktion und Herstellung.

Stephan, Die Drahtseilbahnen.

Bock, Glückauf 1909.

Einleitung.

Allgemeines über Nebenspannungen in Bauwerken aus Stahl.

Im allgemeinen wird den Nebenspannungen nur dadurch Rechnung getragen, daß die zulässige Spannung entsprechend niedrig gewählt wird. Nur in besonderen Fällen, wie bei außergewöhnlich großen Stützweiten, mitunter bei geschweißten Konstruktionen oder bei Nachprüfung älterer Brücken, wird manchmal eine genauere Ermittlung der Nebenspannungen unerläßlich sein, um den Sicherheitsgrad eines solchen Bauwerkes richtig einschätzen zu können.

Gerade in bezug auf den Sicherheitsgrad eines Bauwerkes [1]) ist es nötig, sich über das Wesen der Nebenspannungen ein klares Bild zu verschaffen.

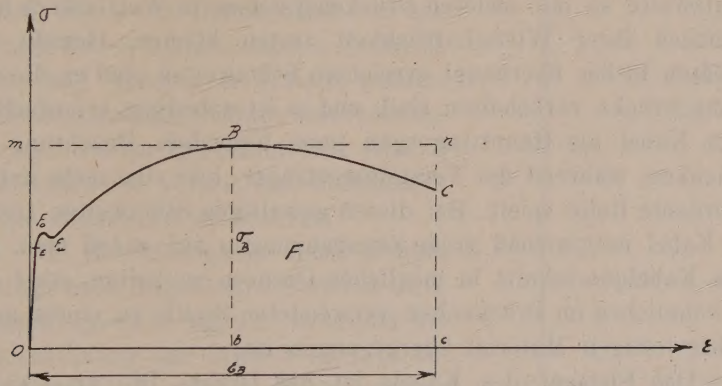

Abb. 1.

Das bekannte Dehnungsdiagramm für den im Brückenbau allgemein verwendeten Flußstahl ist in obenstehender Abb. 1 dargestellt. Daraus erkennt man, daß dieses Material ein großes

[1]) Bleich, Theorie und Berechnung der eisernen Brücken.

sogenanntes plastisches Arbeitsvermögen besitzt, d. h. daß es nach Überschreiten der Elastizitätsgrenze noch eine bedeutende Dehnung vertragen kann, bis es seine Bruchgrenze erreicht. Diese Fähigkeit des Eisens ist für die immer auftretenden Nebenspannungen von besonderer Bedeutung. Im Falle des Überschreitens der Elastizitätsgrenze durch Zusammenwirken von Grund- und Nebenspannungen dehnt sich nämlich das Material derart, daß die Nebenspannungen, wenigstens teilweise, unschädlich gemacht werden.

Wesentlich anders liegen jedoch die Verhältnisse bei sprödem Material, wie es jetzt für die Kabel der großen Hängebrücken verwendet wird.

Das Kabel als Haupttragorgan der Hängebrücken.

Hängebrücken werden im allgemeinen nur bei großen Stützweiten ausgeführt, da sie, wie der Köln-Mühlheimer Wettbewerb im Jahre 1926 wieder gezeigt hat, erst von etwa 300 bis 400 m Stützweite an mit anderen Brückensystemen in Wettbewerb hinsichtlich ihrer Wirtschaftlichkeit treten können. Gerade die größten bisher überhaupt erreichten Stützweiten sind es, die der Hängebrücke vorbehalten sind, und es ist unbedingt erforderlich, dem Kabel als Haupttragorgan ganz besondere Beachtung zu schenken, während der Versteifungsträger hier eine mehr untergeordnete Rolle spielt. Bei diesen gewaltigen Stützweiten treten im Kabel naturgemäß große Zugspannungen auf, sodaß man, um den Kabelquerschnitt in möglichen Grenzen zu halten, statt des gewöhnlichen im Brückenbau verwendeten Stahls zu einem noch höherwertigen Material übergegangen ist.

Das Element des Kabels ist der Draht. Die Amerikaner bauen bekanntlich ihre Kabel auf dem Wege des sog. Luftspinnverfahrens, indem sie die Drähte einzeln über die ganze Spannweite ziehen und schließlich das ganze Bündel paralleler Drähte zu einem Kabel zusammenpressen[1]). Die verhältnismäßig

[1]) Engineering News-Record 1926 No. 14, Bautechnik 1926; Schachenmeier, Die Delaware-River-Brücke.

lange Montagezeit bei diesem Verfahren kann wesentlich abgekürzt werden bei Verwendung von sogenannten verschlossenen

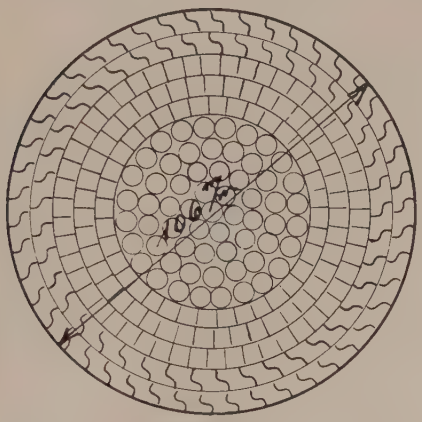

Abb. 2.

Seilen, wie sie in Deutschland von den Firmen Felten & Guilleaume, A. Deichsel, (O.S.) und anderen hergestellt werden. Diese bestehen aus Drähten von verschieden geformtem Querschnitt (s. Abb. 2) und haben den Vorteil, fast vollkommen glatte Oberfläche zu besitzen.

Die Bruchfestigkeit dieser Drähte beträgt nach Angabenvon Felten & Guilleaume $\sigma_B = 139$ kg/mm², während die Bruchdehnung nur etwa 2—3 v. H. beträgt (s. Abb. 3). Wegen dieser geringen Bruchdehnung, die das Drahtmaterial als ein sehr sprödes Metall kennzeichnet, ist ein genaueres Eingehen auf die Nebenspannungen erforderlich; denn dieses Material ist nach Überschreiten der Elastizitätsgrenze nicht mehr imstande, durch plastische Formänderung die Nebenspannungen auszuschalten,

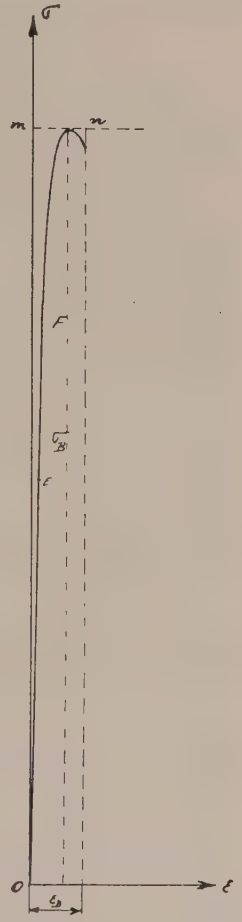

Abb. 3.

sondern das Zusammenwirken der Grundspannung mit einer zu großen Nebenspannung könnte den Bruch des Materials herbeiführen.

Art der Nebenspannungen im Kabel.

Ähnlich wie beim Fachwerk treten auch im Kabel eine Reihe von Spannungen auf, wie Montagespannungen, Vorspannungen, die auf die Herstellungsart der Seile zurückzuführen sind und dergl. Diese Spannungen sind jedoch theoretisch überhaupt nicht mehr zu erfassen und sollen daher in den folgenden Untersuchungen unberücksichtigt bleiben. Es wird ihnen dadurch Rechnung getragen, daß die Bruchspannung nur teilweise ausgenützt wird. Die wichtigste Art der Nebenspannung im Kabel sind die Biegungsspannungen, die dadurch entstehen, daß das Kabel gezwungen wird, bei Belastung der Brücke die Durchbiegungen des Versteifungsträgers mitzumachen. Diese vertikalen Verschiebungen einzelner Kabelpunkte sind bedeutungslos, solange es sich nur um schwache Kabel handelt, die als nahezu schlaffes Seil angesprochen werden können. Für die mächtigen Brückenkabel, wie sie in den letzten Jahrzehnten verwendet wurden, ist die Auffassung als schlaffes Gebilde jedoch nicht selbstverständlich; denn Kabel von 60 und mehr cm Durchmesser dürften doch eine gewisse Steifigkeit besitzen, sodaß bei einer geringen Verbiegung derselben Biegungsspannungen auftreten, über deren Größenordnung man sich aus den vorerwähnten Gründen Rechenschaft ablegen sollte. Daher hat sich der Verfasser die Aufgabe gestellt, in den folgenden Ausführungen den Nachweis zu liefern, daß diese Biegungsspannungen, deren mittelbare Ursache die Verkehrslast auf der Brücke ist, wohl in den meisten Fällen noch in zulässigen Grenzen bleiben [1]).

Dabei möge gleich hier bemerkt werden, daß versucht wurde, stets vereinfachende Annahmen zu machen, wo sie sich theoretisch begründen ließen, um einerseits dem verwickelten Problem

---

[1]) Siehe Schlußbetrachtung S. 73.

überhaupt näherkommen zu können und andererseits Formeln zu erhalten, deren praktische Auswertung noch möglich ist.

Wie oben schon erwähnt, muß man bei der Ermittlung von Nebenspannungen auf die Formänderung des Tragwerkes eingehen, da man aus der neuen Form des Systems die Änderung gegenüber den ursprünglichen Systemgrößen erhält. Diese Änderung der Form kann dann in Beziehungen gebracht werden zu den inneren Kräften, die dabei auftreten.

Daraus folgt, daß die Aufgabe in 2 Hauptteile zerfällt und zwar in

Abschnitt I: Die Berechnung der Formänderung des Kabels infolge Verkehrslast und

Abschnitt II: Die Ermittlung der dabei auftretenden inneren Kräfte. In diesem Abschnitt II werden verschiedene Annahmen zur Lösung der Aufgabe gemacht und in einem

Abschnitt III: Zahlenbeispiel, die auf Grund dieser Annahmen erhaltenen Ergebnisse miteinander verglichen.

Abschnitt I.

Die Formänderung des Kabels durch die Verkehrslast.

Wird das Kabel als steifes Gebilde aufgefaßt, so verhält es sich wie ein durchlaufender Träger, dessen Stützen bestimmten Senkungen unterworfen werden. Die dabei auftretenden Biegungsmomente an den Stützen können berechnet werden, sobald die Winkeländerungen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Sehnen bekannt sind.

In der folgenden Abb. 4 seien zwei Felder $(m-1)-(m)-(m+1)$ einer versteiften Hängebrücke schematisch dargestellt, und zwar sei durch die ausgezogenen Linien das unbelastete System, also die ursprüngliche Lage, durch die gestrichelten Linien die Lage des deformierten Systems, wie es sich nach der Belastung einstellen würde, gekennzeichnet.

Jeder Punkt (m) des Versteifungsträgers erfahre unter einer bestimmten Belastung der Brücke eine gewisse vertikale Senkung η_m, deren Ermittlung z. B. mit Hilfe der elastischen Gewichte keine Schwierigkeit bereitet und in den nachfolgenden Untersuchungen als bekannt vorausgesetzt wird. Der über dem Punkt (m) des Versteifungsträgers gelegene Punkt (m) des Kabels kommt nach Belastung der Brücke in die neue Lage $(m)'$, so daß $(m)-(m)'$ die Verschiebung des Kabelpunktes (m) darstellt. Entsprechendes gilt für die Punkte $(m-1)$ und $(m+1)$. Die geringe Längenänderung der Hängestangen wird hierbei außer Acht gelassen. Dadurch geht der ursprüngliche Winkel ϑ über in ϑ' und es ist die Winkeländerung zwischen den Kabelstücken $(m-1)$ (m) $(m+1)$

$$\gamma_m = \Delta\vartheta_m = \vartheta_m' - \vartheta_m .$$

Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen läßt sich die gesuchte Winkeländerung wie folgt ermitteln (s. Abb. 5).

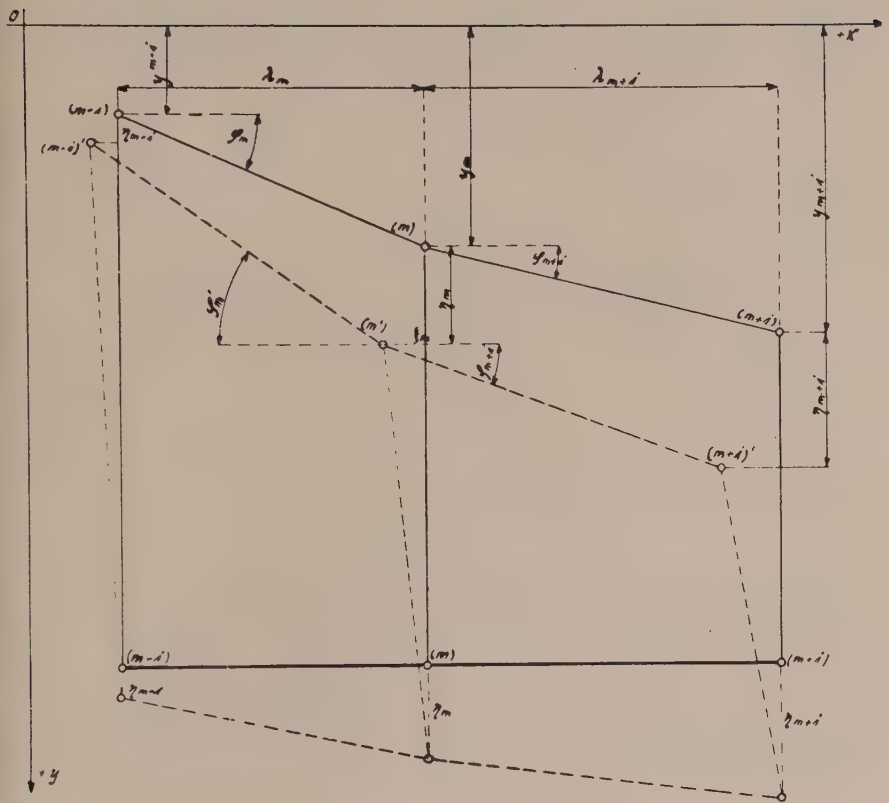

Abb. 4.

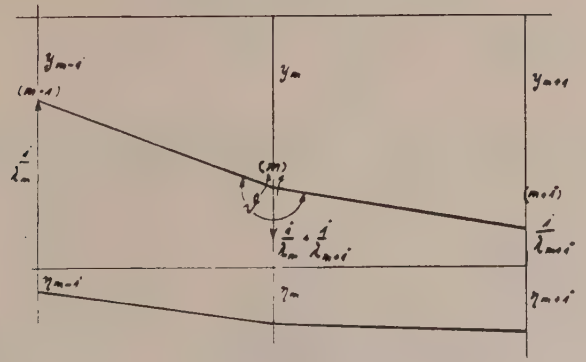

Abb. 5.

$$(1)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\eta_{m-1}}{\lambda_m}+\eta_m\left(\dfrac{1}{\lambda_m}+\dfrac{1}{\lambda_{m+1}}\right)-\dfrac{\eta_{m+1}}{\lambda_{m+1}}-1\cdot\gamma_m \\ =\dfrac{1}{\lambda_m}\sin\varphi_m\cdot\Delta s_m-\dfrac{1}{\lambda_{m+1}}\sin\varphi_{m+1}\cdot\Delta s_{m+1} \end{cases}$$

Bezeichnet man

$$(2)\qquad \Delta\eta_m=\eta_m-\eta_{m-1},$$

so wird

$$(3)\qquad \gamma_m=\frac{\Delta\eta_m}{\lambda_m}-\frac{\Delta\eta_{m+1}}{\lambda_{m+1}}+\frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}}\operatorname{tg}\varphi_{m+1}-\frac{\Delta s_m}{\lambda_m}\operatorname{tg}\varphi_m;$$

setzt man für

$$(4)\qquad \Delta s_m=\frac{S_m s_m}{E_1 F}$$

und unter Berücksichtigung von

$$(5)\qquad S_m=\frac{H_p}{\cos\varphi_m},$$

wobei H_p den Horizontalzug der Verkehrsbelastung bedeutet, so folgt

$$(6)\qquad \gamma_m=-\left(\frac{\Delta\eta_{m+1}}{\lambda_{m+1}}-\frac{\Delta\eta_m}{\lambda_m}\right)+\frac{H_p}{E_1 F}\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi_{m+1}}{\cos\varphi_{m+1}}-\frac{\operatorname{tg}\varphi_m}{\cos\varphi_m}\right)$$

Die Winkeländerung γ_m setzt sich aus 2 Teilen zusammen, von denen der 2. Teil

$$(7)\qquad \frac{H_p}{E_1 F}\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi_{m+1}}{\cos\varphi_{m+1}}-\frac{\operatorname{tg}\varphi_m}{\cos\varphi_m}\right)$$

nur als ein kleines Zusatzglied zum Ausdruck

$$(8)\qquad \frac{\Delta\eta_{m+1}}{\lambda_{m+1}}-\frac{\Delta\eta_m}{\lambda_m}$$

anzusehen ist. Bei dessen rechnerischer Ermittlung sind kleine Vernachlässigungen durchaus am Platze (siehe Zahlenrechnung S. 46).

Der Quotient

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_m}{\cos\varphi_m}$$

stellt eine goniometrische Beziehung dar, die nur von der Form

des Kabels, also im Falle einer Parabel, die unseren weiteren Untersuchungen stets zugrunde gelegt sei, von deren Pfeilverhältnis

$$\psi = \frac{f}{l}$$

abhängt.

Der Quotient

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_m}{\cos \varphi_m}$$

soll ausgedrückt werden als Funktion von x, also

(9) $$f(x) = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi}$$

Mit

$$\frac{1}{\cos \varphi} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

wird

$$f(x) = \operatorname{tg} \varphi \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

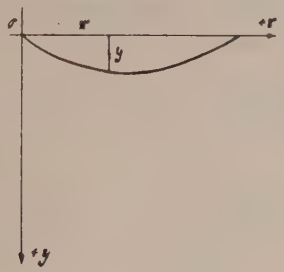

Abb. 6a.

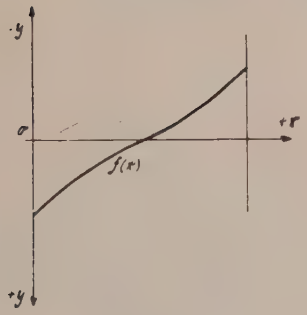

Abb. 6b.

Für dieses Koordinaten-System lautet die Parabelgleichung

$$y = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{4f}{l^2}(l - 2x) = u$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi} = u\sqrt{1+u^2} = \frac{4f}{l^2}(l-2x)\sqrt{1+\left[\frac{4f}{l^2}(l-2x)\right]^2}$$

Diese Funktion stellt eine S-Kurve dar, für die

$$\text{bei } x = 0 \qquad f(x) = \frac{4f}{l}\sqrt{1+\left(\frac{4f}{l}\right)^2}$$

$$\text{bei } x = l \qquad f(x) = -\frac{4f}{l}\sqrt{1+\left(\frac{4f}{l}\right)^2}$$

$$\text{bei } x = \frac{l}{2} \qquad f(x) = 0 \text{ ist.}$$

Diese S-Kurve ist nur sehr schwach gekrümmt, wie der zweite Differential-Quotient zeigt, ist:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{2u + 4u^3}{2\sqrt{1+u^2}}\left(-\frac{8f}{l^2}\right) = -\frac{8f}{l^2}\frac{1+2u^2}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \left(-\frac{8f}{l^2}\right)\frac{4u\sqrt{1+u^2} - \dfrac{(1+2u^2)\cdot 2u}{2\sqrt{1+u^2}}}{1+u^2}\left(-\frac{8f}{l^2}\right)$$

$$= \left(\frac{8f}{l^2}\right)^2 \frac{u(2u^2+3)}{(1+u^2)\sqrt{1+u^2}}$$

An der Stelle

$$x = \frac{l}{4}$$

wird

$$u = \frac{4f}{l^2}\left(l - \frac{l}{2}\right) = 2\psi$$

und damit

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -\frac{64\psi^2}{l^2}\cdot\frac{2\psi(8\psi^2+3)}{(1+4\psi^2)\sqrt{1+4\psi^2}} = \frac{128\psi^3(8\psi^2+3)}{l^2(1+4\psi^2)^{3/2}}$$

nimmt man an

$$\psi = \frac{1}{10}$$

so würde

$$\frac{d^2 f(x)}{d x^2} = \frac{128 \cdot 10^{-3} \, (8 \cdot 10^{-2} + 3)}{l^2 (1 + 4 \cdot 10^{-2})^{3/2}} = \frac{0.128 \cdot 3{,}08}{l^2 \sqrt{1{,}09^3}} \approx \frac{0{,}384}{l^2}$$

Die Funktion $f(x)$ besitzt daher schon bei einer Stützweite der Brücke von nur 100 m einen Krümmungshalbmesser

$$\varrho \approx \frac{l^2}{0{,}384} \approx 2{,}6\, l^2 \approx 26\,000 \text{ m}$$

sodaß wir sie ohne weiteres als gerade mit

$$\varrho = \infty$$

auffassen dürfen.

Diese Ersatzgrade lautet:

$$(12) \qquad \left| \begin{array}{l} g(x) = \dfrac{4\psi \sqrt{1+4\psi^2}}{\dfrac{l}{2}} \cdot x + 4\psi \sqrt{1+4\psi^2} \\ \qquad = 8\psi \sqrt{1+4\psi^2} \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{l} \right) \end{array} \right.$$

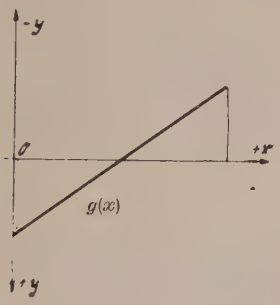

Abb. 6 c.

Nach den vorausgeschickten Erörterungen ersetzen wir also Gl. (10) durch Gl. (12); das gleiche gilt natürlich auch für

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}}$$

Da aber in dem Ausdruck für γ_m die Differenz

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_{m+1}}{\cos\varphi_{m+1}} - \frac{\operatorname{tg}\varphi_m}{\cos\varphi_m}$$

auftritt, läßt sich nach Obigem dafür die Differenz

(13) $$g(x_m) - g(x_{m+1}) = \Delta g(x_m)$$

setzen. Nun ist

(14) $$\Delta g(x_m) = -8\psi\sqrt{1+(4\psi)^2}\cdot\frac{\Delta x_m}{l}$$

sodaß mit $$\Delta x_m = -\lambda_{m+1}$$

(15) $$\frac{\operatorname{tg}\varphi_m}{\cos\varphi_m} - \frac{\operatorname{tg}\varphi_{m+1}}{\cos\varphi_{m+1}} = +8\psi\sqrt{1+(4\psi)^2}\cdot\frac{\lambda_{m+1}}{l}$$

wird. Bezeichnet man noch den Wert, der nur vom Pfeilverhältnis abhängig ist, mit

(16) $$k = 8\psi\sqrt{1+(4\psi)^2}$$

so lautet die Formel (8) zur Berechnung des Winkels

(17) $$\gamma_m = \frac{\lambda_{m+1}\cdot\Delta\eta_m - \lambda_m\cdot\Delta\eta_{m+1}}{\lambda_m\cdot\lambda_{m+1}} - \frac{H_p}{E_1 F}\,k\,\frac{\lambda_{m+1}}{l}$$

Zur Vereinfachung der weiteren Untersuchung soll noch angenommen werden, daß die Auflagerpunkte des Versteifungsträgers vertikal unter den Pylonenköpfen liegen — was ja in Wirklichkeit wegen der etwas größeren Endfelder nicht genau zutrifft — wir also schreiben können

$$\lambda_m = \lambda_{m+1} = \lambda$$

und $$l = n\cdot\lambda$$

wobei

λ die konstante Feldweite und
n die Zahl der Felder ist.

Dann gilt mit Ausnahme des Punktes 0 die einfache Beziehung

(18) $$\gamma_m = \frac{\Delta\eta_m - \Delta\eta_{m+1}}{\lambda} - \frac{H_p}{E_1 F}\cdot\frac{k}{n}$$

Bedenkt man ferner, daß das zweite Glied für eine bestimmte Brücke und gegebenen Belastungsfall eine Konstante darstellt, nämlich

(19) $$d = \frac{H_p}{E_1 F} \cdot \frac{k}{n}$$

mit

$$k = 8\psi \sqrt{1 + (4\psi)^2}$$

und definiert man

(20) $$\Delta \eta_m - \Delta \eta_{m+1} = \Delta^2 \eta_m$$

so erhalten wir schließlich den einfachen Ausdruck

(21) $$\gamma_m = \frac{\Delta^2 \eta_m}{\lambda} - d$$

Speziell für den Punkt 0 am Pylonenkopf gelangen wir zur Winkeländerung γ_0 indem wir uns einen Hilfsstab 0—I mit dem

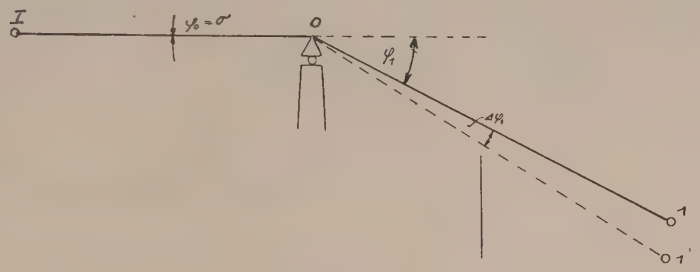

Abb. 7.

Winkel φ_0, denken (s. Abb. 7), der auch nach der Durchbiegung sich nicht ändert, sodaß mit

$$\Delta \varphi_0 = 0$$

nach Gl. (1) sich ergibt

(22) $$\gamma_0 = -\operatorname{tg} \Delta \varphi_1$$

unter Berücksichtigung von Gl. (7) folgt dann

$$\gamma_0 = -\frac{\Delta \eta_1}{\lambda_1} + \frac{H_p}{E_1 F} \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\cos \varphi_1}$$

und nach Gl. (12) für

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} = -8\psi \sqrt{1 + (4\psi)^2} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right)$$

eingeführt, erhalten wir mit $x = \lambda_1$ und Bezugnahme auf (16)

(23) $$\gamma_0 = -\frac{\eta_1}{\lambda_1} + \frac{H_p}{E_1 F} k \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda_1}{l} \right)$$

Nimmt man wieder gleiche Feldweiten an und führt für den zweiten Summanden wie oben ein

$$d_0 = \frac{H_p}{E_1 F} \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{n-2}{2} \tag{24}$$

so kann man bei Benutzung von Gl. (19) auch schreiben

$$\gamma_0 = -\frac{\eta_1}{\lambda} + d\,\frac{n-2}{2} \tag{25}$$

Zu γ_0 kommt noch ein kleines Zusatzglied, das seine Ursache in der durch die Verkehrslast hervorgerufenen Schiefstellung der Pylone gegen die Vertikale hat.

Bei irgendeiner Belastung neigt sich die Pylone gegen Brückenmitte um den Winkel β. Um denselben Betrag dreht sich auch die Einspannormale des Kabels. Rechnet man die Winkeldrehungen im Sinne des Uhrzeigers positiv, so ist mit Rücksicht auf $\gamma_m = \vartheta_m' - \vartheta_m$

$$\overline{\gamma}_0 = +\beta + \gamma_0 \tag{26}$$

Siehe Zahlenrechnung S. 47.

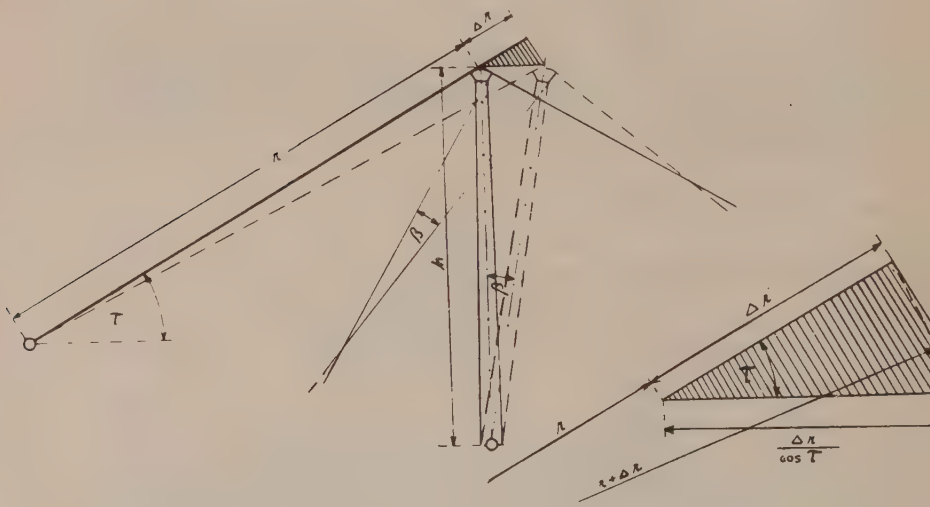

Abb. 8.

Aus Abbildung 8 folgt zur Berechnung von β, daß

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta r}{h \cos\tau} \tag{27}$$

wenn man unter Δr die durch die Verkehrslast auftretende Längenänderung der Rückhaltekette versteht,

$$\text{also } \Delta r = \frac{S \cdot r}{E_1 F} = \frac{H_p}{\cos\tau} \cdot \frac{r}{E_1 F} \text{ ist.} \tag{28}$$

Somit wird

$$\beta = \frac{H_p}{E_1 F} \cdot \frac{r}{h} \cdot \frac{1}{\cos^2\tau}$$

oder mit

$$\frac{1}{\cos^2\tau} = 1 + \operatorname{tg}^2\tau$$

$$\beta = \frac{H_p}{E_1 F} \cdot \frac{r}{h} (1 + \operatorname{tg}^2\tau) \tag{29}$$

Abschnitt II.

Bestimmung der Biegungsmomente im Kabel.

A. Das Kabel als durchlaufender Träger.

a) Ohne Berücksichtigung der Achsialkraft.

Genaue Auflösung der Clapeyronschen Gleichungen.

Den Biegungsspannungen im Hängegurt wurde meines Wissens zum ersten Male bei der Entwurfsbearbeitung der Kaiserbrücke in Breslau Beachtung geschenkt. Es sollte ursprünglich der Hängegurt als Kastenquerschnitt ausgebildet werden[1]). Nun ergab jedoch die genaue Durcharbeitung, daß bei den verhältnismäßig großen Durchbiegungen der Hängebrücke ein so steifer Hängegurt unzweckmäßig sei, weil die in ihm entstehenden Biegungsmomente zu große Spannungen hervorrufen.

Die Berechnung wurde damals so durchgeführt, daß man den Hängegurt als einen durchlaufenden Träger auf elastischen Stützen auffaßte, wobei die vertikalen Senkungen der Hängestangenanschlußpunkte im Kabel gleich den entsprechenden im Versteifungsträger gesetzt wurden. Mit Hilfe eines Williotschen Verschiebungsplanes konnte die neue Lage des Hängegurtes nach der Durchbiegung gefunden werden, sodaß sich nun die Winkeländerungen errechnen ließen und aus diesen die Stützenmomente.

Es hat sich dabei gezeigt, daß die größten Stützenmomente bei den Pylonenköpfen auftreten, weil gerade hier die Winkeländerungen zwischen den Sehnen im ursprünglichen System und denjenigen nach der Durchbiegung am größten sind.

---

[1]) Zentralblatt der Bauverwaltung 1914; Brugsch, Die Nebenspannungen der Hängebrücken mit steifem Hängegurt.

Für einen durchlaufenden Träger auf vielen Stützen, deren Senkungen bekannt sind, auf den aber sonst keine Kräfte wirken, lauten die Clapeyronschen Gleichungen [1])

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{r} 2M_0 l_1 + M_1 l_1 = 6EJ\gamma_0 \\ M_0 l_1 + 2M_1(l_1+l_2) + M_2 l_2 = 6EJ\gamma_1 \\ M_1 l_2 + 2M_2(l_2+l_3) + M_3 l_3 = 6EJ\gamma_2 \\ M_2 l_3 + 2M_3(l_3+l_4) + M_4 l_4 = 6EJ\gamma_3 \\ M_3 l_4 + 2M_4(l_4+l_5) + M_5 l_5 = 6EJ\gamma_4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Die Auflösung dieses Systems von linearen Gleichungen bietet zwar keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, ist jedoch, da es sich meist um eine beträchtliche Anzahl von Stützen handelt, außerordentlich zeitraubend. Bei Durchführung der Zahlenrechnung empfiehlt sich eine kleine Umformung der Gl. (1), indem man allgemein schreibt

$$l_m = \frac{\lambda_m}{\cos\varphi_m} \quad \text{oder} \quad \frac{l_m}{\lambda_m} = \frac{1}{\cos\varphi_m}$$

und da die Werte $\frac{1}{\cos\varphi_m}$ bereits in der statischen Berechnung ermittelt wurden, sollen die Gleichungen (1) sämtlich durch λ_m dividiert werden, sodaß an Stelle der Längen l_m die Werte $\frac{1}{\cos\varphi_m}$ treten. Die Normalglieder N_m auf der rechten Seite der Gl. (1) werden dann, bei lauter gleichen Feldweiten

$$N_m = \frac{6EJ}{\lambda}\gamma_m$$

wobei der konstante Faktor

$$(2)\qquad \frac{6EJ}{\lambda} = a$$

gesetzt werden soll, sodaß also

$$(3)\qquad N_m = a\gamma_m$$

ist.

---

[1]) Dabei ist vorausgesetzt, daß der Punkt 0 eingespannt ist.

Näherungsweise Auflösung der Clapeyronschen Gleichungen.

Es ist meist nicht nötig, den Verlauf der Momente auf die ganze Kabellänge zu kennen, sondern es wird wohl stets genügen, die Momente an jenen Stellen zu ermitteln, wo sie Größtwerte annehmen.

Man erhält nun recht brauchbare Resultate, wie eine spätere Zahlenrechnung zeigen wird, auch ohne das ganze Gleichungssystem auflösen zu müssen, durch folgende Überlegung.

Das Stützenmoment in einem durchlaufenden Träger pflanzt sich bekanntlich durch die der Stütze abgelegenen Fixpunkte fort. Bei sehr vielen ungefähr gleich großen Feldern liegt dieser Fixpunkt etwa im Fünftel des Feldes. Demnach verringert sich der Einfluß des Momentes von der Stütze $(m+3)$ auf die folgenden Stützenmomente sehr rasch und beträgt bei der ungefähren Lage des Fixpunktes mit den Bezeichnungen der Abb. 9.

(4) $$i \approx \frac{l}{5}$$

an der Stütze $(m-2)$ $\quad \frac{1}{4} \quad M_{(m+3)}$

„ „ „ $(m-1)$ $\quad \left(\frac{1}{4}\right)^2 M_{(m+3)}$

„ „ „ (m) $\quad \left(\frac{1}{4}\right)^3 M_{(m+3)}$

Das heißt, daß das an der dritten von (m) entfernt liegenden Stütze wirkende Moment im Punkte (m) selbst nur noch ein Moment erzeugt, das etwa 1,56 v. H. seines Wertes ausmacht. Man begeht daher keinen nennenswerten Fehler, wenn man die Annahme macht, daß

(5) $$M_{(m+3)} = 0$$ ist.

Eine analoge Betrachtung gilt natürlich auch für die links von (m) liegenden Momente, sodaß ebenfalls

(6) $$M_{m-3}=0$$

angenommen werden darf.

Demnach lautet die Gleichungsgruppe für die Ermittlung des Momentes M_m:

Abb. 9.

$$(7)\quad \begin{cases} 2M_{m-2}(l_{m-2}+l_{m-1})+M_{m-1}l_{m-1}=6EJ\gamma_{m-2} \\ M_{m-2}l_{m-1}+2M_{m-1}(l_{m-1}+l_m)+M_m l_m=6EJ\gamma_{m-1} \\ M_{m-1}l_m+2M_m(l_m+l_{m+1})+M_{m+1}l_{m+1}=6EJ\gamma_m \\ M_m l_{m+1}+2M_{m+1}(l_{m+1}+l_{m+2})+M_{m+2}l_{m+2}=6EJ\gamma_{m+1} \\ M_{m+1}l_{m+2}+2M_{m+2}(l_{m+2}+l_{m+3})+=6EJ\gamma_{m+2} \end{cases}$$

Diese 5 Gleichungen genügen zur Bestimmung der 5 Stützenmomente, doch hat von diesen 5 Momenten nur das Moment M_m Anspruch auf genügend große Genauigkeit, während zur Bestimmung von M_{m+1} noch das Moment M_{m+3} hätte berücksichtigt werden müssen.

Die Untersuchung der Biegungsspannungen im Kabel wird sich wohl stets nur auf den Punkt 0 beziehen, wo sie bei weitem den größten Wert erreichen. Für diesen Punkt lautet das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2M_0 l_1 + M_1 l_1 = 6EJ\overline{\gamma_0} \\ M_0 l_1 + 2M_1(l_1+l_2)+M_2 l_2 = 6EJ\gamma_1 \\ M_1 l_2 + 2M_2(l_2+l_3) = 6EJ\gamma_2, \end{cases}$$

aus dem M_0 ohne weiteres errechnet werden kann.

b) Mit Berücksichtigung der Achsialkraft.

Bei der vorangegangenen Berechnung der Biegungsmomente im Kabel war von der Wirkung der vorhandenen Achsialkraft abgesehen worden, also nur diejenigen Spannungen berücksichtigt, welche durch die Biegungsmomente in den einzelnen Kabelstücken hervorgerufen werden.

In Wirklichkeit herrscht aber im Kabel eine bedeutende Zugkraft. Diese bewirkt, daß die Kabelstücke, welche durch die Momente M bereits Verbiegungen erlitten haben, weitere Deformationen erfahren, deren Wirkung im folgenden untersucht wird.

Denken wir uns einen durchlaufenden Träger durch eine Achsialkraft beansprucht und erteilen seinen Stützpunkten gewisse Verschiebungen, so treten im allgemeinen an jedem Auflagerpunkt Stützenmomente auf. Zerschneiden wir einen solchen Träger an jeder Stütze und bringen an den Schnittstellen die zerstörten inneren Kräfte als äußere Kräfte wieder an, so entsteht der in Abb. 10 dargestellte Belastungsfall. Dabei wurden

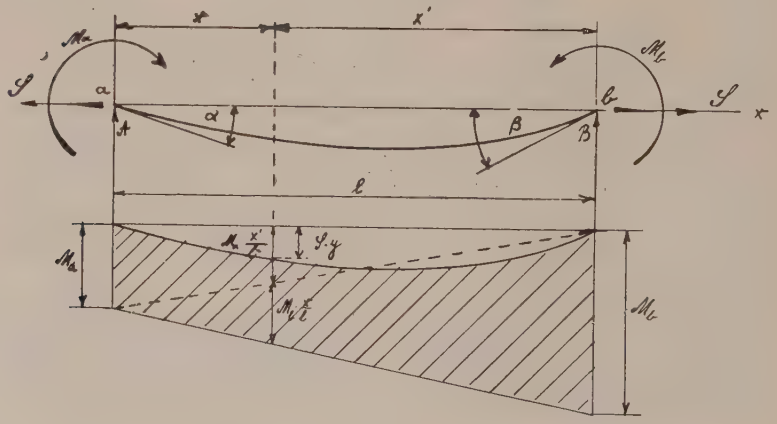

Abb. 10.

die Momente aus dem Eigengewicht des Kabels ihrer Geringfügigkeit wegen außer acht gelassen. Es möge wieder an-

genommen werden, daß es sich um einen homogenen Querschnitt mit dem Trägheitsmoment J handle. Es ist also die Aufgabe zu lösen:

Wie groß sind die Winkeländerungen α und β der Endtangenten eines durch die Kraft S auf Zug beanspruchten Stabes, der an den Enden durch die Momente M_a und M_b beansprucht wird? (S. Abb. 10.) Die Lösung dieser Aufgabe ist zwar bekannt, doch soll sie hier der Vollständigkeit halber und um später darauf Bezug nehmen zu können, mit aufgeführt werden.

M_a und M_b sind die Einspannungsmomente an den Punkten a und b. Sie sollen dann als positiv gerechnet werden, wenn sie wie in obenstehender Abbildung den Stab so deformieren, daß dessen Krümmungsmittelpunkt oben liegt.

α und β sind die durch die Momente M_a bzw. M_b hervorgerufenen Winkeldrehungen der Endtangenten,

S die im Kabelstück a—b herrschende Zugkraft.

An der Stelle x wird dann das Moment

$$M_x = M_a \frac{x'}{l} + M_b \frac{x}{l} - S \cdot y$$

Wegen der späteren Integration soll die Gleichung geschrieben werden

$$M_x = M_a - \frac{M_a - M_b}{l} x - S y \tag{1}$$

Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung allgemein

$$EJ \frac{d^2 y}{d x^2} = - M$$

in unserem Falle also

$$\begin{cases} EJ \dfrac{d^2 y}{d x^2} = - M_a + \dfrac{M_a - M_b}{l} x + S \cdot y \\ \dfrac{d^2 y}{d x^2} - S y = \dfrac{M_a - M_b}{EJ l} x - \dfrac{M_a}{EJ} \end{cases} \tag{2}$$

setzen wir zur Abkürzung

(3) $$\frac{M_a - M_b}{EJl} = A$$

(4) $$\frac{M_a}{EJ} = B$$

(5) $$\frac{S}{EJ} = m^2$$

so lautet die allgemeine Lösung der Gl. (2)

(6) $$y = C_1 \cdot e^{mx} + C_2 \cdot e^{-mx} - \frac{A}{m^2} x + \frac{B}{m^2}$$

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 lassen sich aus den Randbedingungen bestimmen, nämlich daß für

$$x = 0 \text{ auch } y = 0$$

sein muß, also

$$C_1 + C_2 + \frac{B}{m^2} = 0$$

wird, woraus sich

(7) $$C_2 = -C_1 - \frac{B}{m^2}$$

ermittelt.

Ferner muß auch für

$$x = l \qquad y = 0$$

sein, d. h.

$$C_1 \cdot e^{lm} + C_2 \cdot e^{-lm} - \frac{A}{m^2} l + \frac{B}{m^2} = 0$$

Für C_2 den Wert der Gl. (7) eingesetzt, liefert

$$C_1 \cdot e^{lm} - C_1 \cdot e^{-lm} - \frac{B}{m^2} e^{-lm} - \frac{A}{m^2} l + \frac{B}{m^2} = 0$$

$$C_1 (e^{lm} - e^{-lm}) = \frac{B}{m^2} e^{-lm} + \frac{A}{m^2} l - \frac{B}{m^2}$$

Mit Benutzung der hyperbolischen Funktionen läßt sich allgemein ausdrücken

$$\frac{e^u - e^{-u}}{2} = \operatorname{Sin} u,$$

sodaß wir schreiben können

$$e^{lm} - e^{-lm} = 2 \operatorname{Sin} lm$$

Führen wir schließlich wieder die Werte der in den Gl. (3), (4) und (5) angegebenen Abkürzungen ein, so erhalten wir

$$C_1 = \frac{2}{2\,\mathfrak{Sin}\,l\,m}\left(\frac{M_a}{EJ}\,\frac{EJ}{S}\cdot e^{-lm} - \frac{M_a}{EJ}\cdot\frac{EJ}{S} + \frac{M_a - M_b}{EJ\cdot l}\cdot l\,\frac{EJ}{S}\right)$$

also

$$C_1 = \frac{1}{S\cdot 2\,\mathfrak{Sin}\,l\,m}\,(M_a\cdot e^{-lm} - M_b) \tag{8}$$

und da nach Gl. (7)

$$C_2 = -C_1 - \frac{B}{m^2}$$

war, folgt mit dem für C_1 gewonnenen Wert

$$C_2 = -\frac{1}{S\cdot 2\,\mathfrak{Sin}\,l\,m}\,(M_a\,e^{-lm} - M_b) - \frac{M_a}{S} \tag{9}$$

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 in Gl. (6) eingesetzt, liefert mit Berücksichtigung von (3), (4) und (5)

$$y = \frac{\mathfrak{Sin}\,m\,x}{\mathfrak{Sin}\,m\,l}\cdot\frac{M_a\cdot e^{-lm} - M_b}{S} + \frac{1}{S}\left(M_a - M_a e^{-mx} - \frac{M_a - M_b}{l}\,x\right) \tag{10}$$

Die Neigung der Tangente erhalten wir durch Differentation der Gl. (10)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M_a e^{-lm} - M_b}{S\,\mathfrak{Sin}\,lm}\cdot m\cdot\mathfrak{Cof}\,mx + \frac{m\,M_a e^{-mx}}{S} - \frac{M_a - M_b}{Sl} \tag{11}$$

Setzen wir noch, in Anbetracht der sehr kleinen Drehungen, statt der tg die Winkel selbst, so wird an der Stelle

$$x = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = \alpha$$

der Wert für

$$\alpha = \frac{m\,(M_a\,e^{-lm} - M_b)}{S\,\mathfrak{Sin}\,lm} + \frac{m\,M_a}{S} - \frac{M_a - M_b}{Sl} \tag{12}$$

ebenso an der Stelle

$$x = l \qquad \frac{dy}{dx} = -\beta$$

wobei das Minuszeichen deswegen zu setzen ist, weil wir die Ordinaten y nach abwärts positiv rechnen. Es wird also

$$(13)\quad -\beta = \frac{m(M_a e^{-lm} - M_b)}{S\,\mathfrak{Sin}\,lm}\,\mathfrak{Cof}\,lm + \frac{m M_a e^{-lm}}{S} - \frac{M_a - M_b}{Sl}$$

und nach einfacher Umformung

$$(14)\quad \alpha = \frac{m}{S}\left[\frac{M_a e^{-lm} - M_b}{\mathfrak{Sin}\,lm} + M_a\right] - \frac{M_a - M_b}{Sl}$$

$$(15)\quad -\beta = \frac{m}{S}\left[\frac{M_a e^{-lm} - M_b}{\mathfrak{Sin}\,lm}\,\mathfrak{Cof}\,lm + M_a e^{-lm}\right] - \frac{M_a - M_b}{Sl}$$

Machen wir noch von der allgemeinen Beziehung Gebrauch, daß

$$(16)\quad e^{-u} = \mathfrak{Cof}\,u - \mathfrak{Sin}\,u$$

ist, so läßt sich auch schreiben

$$(17).\quad \alpha = \frac{m}{S}\left[\frac{M_a(\mathfrak{Cof}\,lm - \mathfrak{Sin}\,lm) - M_b + M_a\,\mathfrak{Sin}\,lm}{\mathfrak{Sin}\,lm}\right] - \frac{M_a - M_b}{Sl}$$

und

$$(18)\quad \begin{cases} -\beta \\ = \dfrac{m}{S}\left[\dfrac{(M_a(\mathfrak{Cof}\,lm - \mathfrak{Sin}\,lm) - M_b)\,\mathfrak{Cof}\,lm + M_a(\mathfrak{Cof}\,lm - \mathfrak{Sin}\,lm)\,\mathfrak{Sin}\,lm}{\mathfrak{Sin}\,lm}\right] \\ - \dfrac{M_a - M_b}{Sl} \end{cases}$$

Die letzten beiden Gleichungen lassen sich unter Beachtung von

$$(19)\quad \mathfrak{Cof}^2 lm - \mathfrak{Sin}^2 lm = 1$$

noch vereinfachen zu

$$(20)\quad \alpha = \frac{m}{S}\left[\frac{M_a\,\mathfrak{Cof}\,lm - M_b}{\mathfrak{Sin}\,lm}\right] - \frac{M_a - M_b}{Sl}$$

$$(21)\quad -\beta = \frac{m}{S}\left[\frac{M_a - M_b\,\mathfrak{Cof}\,lm}{\mathfrak{Sin}\,lm}\right] - \frac{M_a - M_b}{Sl}$$

Bezeichnet in der folgenden Abb. 11

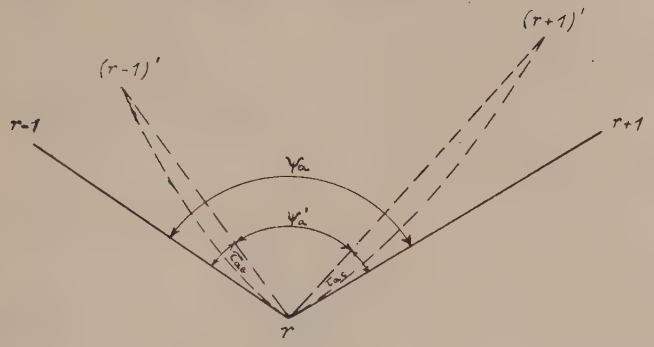

Abb. 11

$(r-1)\,r\,(r+1)$ zwei aufeinanderfolgende Kabelstücke, die den $\sphericalangle\, \Psi_r$ einschließen; ferner

$(r-1)'\,r\,(r+1)'$ den $\sphericalangle\, \Psi_r'$ dieser Sehnen nach der Deformation, so stellt

$\sphericalangle\, \tau_{r\,(r-1)}$ den Drehwinkel der Endtangente am rechten Ende des Stabes l_r

$\sphericalangle\, \tau_{r\,(r+1)}$ den Drehwinkel der Endtangente am linken Ende des Stabes l_{r+1} dar.

c) Anwendung.

Die Gl. (20) und (21) S. 25 ermöglichen uns nun unmittelbar die Berechnung der $\sphericalangle\, \tau_{r\,(r-1)}$ und $\tau_{r\,(r+1)}$, da ja $\tau_{r\,(r-1)}$ nichts anderes als den in Gl. (21) mit β und $\tau_{r\,(r+1)}$ den in Gl. (20) mit α bezeichneten Winkel darstellt.

Aus Abb. 11 folgt

(1) $$\gamma_a = \tau_{r\,(r-1)} + \tau_{r\,(r+1)}$$

Das ergibt

(2) $$\tau_{r\,(r-1)} = -\frac{m_r}{S_r}\left[\frac{M_{(r-1)} - M_r\,\mathfrak{Cof}\,(lm)_r}{\mathfrak{Sin}\,(lm)_r}\right] + \frac{M_{(r-1)} - M_r}{(Sl)_r}$$

und

(3) $$\tau_{r\,(r+1)} = \frac{m_{r+1}}{S_{(r+1)}}\left[\frac{M_r\,\mathfrak{Cof}\,(lm)_{(r+1)} - M_{(r+1)}}{\mathfrak{Sin}\,(lm)_{(r+1)}}\right] - \frac{M_r - M_{(r+1)}}{(Sl)_{(r+1)}}$$

oder durch Umformung

(4) $$\tau_{r(r-1)} = \frac{M_r}{(Sl)_r}\left[\frac{m_r\,l_r}{\mathfrak{Tg}\,(lm)_r} - 1\right] + \frac{M_{(r-1)}}{(Sl)_r}\left[1 - \frac{(lm)_r}{\mathfrak{Sin}\,(lm)_r}\right]$$

schreibt man zur Abkürzung

(5) $$\nu_r' = \frac{(lm)_r}{\mathfrak{Tg}\,(lm)_r} - 1$$

und

(6) $$\nu_r'' = 1 - \frac{(lm)_r}{\mathfrak{Sin}\,(lm)_r}$$

so wird

(7) $$\tau_r = \frac{M_r}{(Sl)_r}\cdot\nu_r' + \frac{M_{(r-1)}}{(Sl)_r}\cdot\nu_r''$$

Analog

(8) $$\tau_{r\,(r+1)} = \frac{M_r}{(Sl)_{r\,(r+1)}}\left[\frac{(lm)_{r\,(r+1)}}{\mathfrak{Tg}\,(lm)_{r\,(r+1)}} - 1\right] + \frac{M_{(r+1)}}{(Sl)_{r\,(r+1)}}\left[1 - \frac{(lm)_{(r+1)}}{\mathfrak{Sin}\,(lm)_{(r+1)}}\right]$$

und schreibt man auch hier

(9) $$\nu'_{(r+1)} = \frac{(lm)_{(r+1)}}{\mathfrak{Tg}\,(lm)_{(r+1)}} - 1$$

(10) $$\nu''_{(r+1)} = 1 - \frac{(lm)_{(r+1)}}{\mathfrak{Sin}\,(lm)_{(r+1)}}$$

so wird

(11) $$\tau_{r(r+1)} = \frac{M_r}{(Sl)_{(r+1)}}\cdot\nu'_{(r+1)} + \frac{M_{(r+1)}}{(Sl)_{(r+1)}}\,\nu''_{(r+1)}$$

die Werte aus Gl. (7) und (9) in (1) eingesetzt liefert

(12) $$M_{(r-1)}\frac{\nu_r''}{(Sl)_r} + M_r\left(\frac{\nu_r'}{(Sl)_r} + \frac{\nu'_{(r+1)}}{(Sl)_{(r+1)}}\right) + \frac{M_{(r+1)}\,\nu''_{(r+1)}}{(Sl)_{(r+1)}} = \gamma_r$$

Wir schreiben zur Abkürzung

(13) $$\frac{\nu_r''}{(Sl)_r} = l_r''$$

(14) $$\frac{\nu''_{(r+1)}}{(S\,l)_{(r+1)}} = l''_{(r+1)}$$

ebenso für

(15) $$\frac{\nu_r'}{(S\,l)_r} = l_r'$$

(16) $$\frac{\nu'_{(r+1)}}{(S\,l)_{(r+1)}} = l'_{(r+1)}$$

und erhalten damit

(17) $$M_{(r-1)}\,l_r'' + M_r\,(l_r' + l'_{(r+1)}) + M_{(r+1)}\,l''_{(r+1)} = \gamma_r$$

Für jeden Punkt (r) läßt sich eine solche erweiterte Clapeyronsche Gleichung aufstellen, sodaß man wieder ein System linearer Gleichungen erhält, die man grundsätzlich lösen kann, nachdem man die einzelnen Werte l_r' und l_r'' für jedes Feld errechnet hat.

Näherungslösung.

Aus den auf S. 17 auseinandergesetzten Gründen soll auch hier eine ähnliche Näherungslösung abgeleitet werden, indem man annimmt, daß sich ein Moment nur über je 3 Felder nach links und rechts erstreckt.

Man erhält dann ganz ähnlich wie dort

(21) $$\begin{cases} M_0\,l_1' + M_1\,l_1'' = \bar{\gamma}_0 \\ M_0\,l_1'' + M_1\,(l_1' + l_2') + M_2\,l_2'' = \gamma_1 \\ M_1\,l_2'' + M_2\,(l_2' + l_3') = \gamma_2 \end{cases}$$

wobei natürlich auch hier die auf S. 18 gemachten Bemerkungen gelten.

B. Das eingespannte Kabelstück.

In den vorausgegangenen Untersuchungen war angenommen, daß es sich stets um einen vollwandigen Kabelquerschnitt handelt.

Es soll nun für die weitere Untersuchung, um den wirklichen Verhältnissen im Kabel möglichst nahe zu kommen, angenommen werden, daß das Kabel aus einer Anzahl horizontal liegender Lamellen besteht, die an den Enden derart miteinander verbunden (verschweißt) sind, daß hier starre Einspannung vor-

ausgesetzt werden darf, während im Feld relative Gleitung der einzelnen Lamellen parallel ihrer Richtung unbehindert ist.

Ein solcher Körper würde einem Kabelstück entsprechen, das man zwischen zwei Kabelschellen herausgeschnitten hat; denn die Schellen sind mit einer solchen Pressung auf dem Gesamtkabelquerschnitt aufgeschraubt, daß ein Gleiten einzelner Drähte an diesen Stellen als ausgeschlossen gelten soll.

Unterwirft man ein solches Kabelstück einer Achsialkraft und erteilt seinen beiden Enden gewisse Winkeldrehungen α und β, so sind zur Aufrechterhaltung dieser Verformung an den beiden Enden außer den Auflagerdrücken A und B Momente M' und M'' erforderlich, die im Folgenden ermittelt werden sollen.

Dabei wird wiederum davon ausgegangen, daß die Winkeldrehungen der Endtangenten sehr klein seien und kleine Größen zweiter Ordnung dagegen vernachlässigt werden dürfen.

Um die in Abb. 10 dargestellte Verformung des Kabelstückes zu erhalten, denken wir uns die endgültige Deformation durch drei aufeinanderfolgende Teildeformationen erreicht; und zwar sollen die einzelnen Lamellen vorerst auch an den Enden nicht miteinander verbunden sein.

Bei den folgenden Untersuchungen bedeutet:

- α die unter der Belastung auftretende Winkeländerung der linken Endtangente,
- β die unter der Belastung auftretende Winkeländerung der rechten Endtangente,
- M' das Gesamtmoment am linken Ende des Lamellenbalkens,
- M'' das Gesamtmoment am rechten Ende des Lamellenbalkens,
- S die Gesamtzugkraft,
- h_i den gegenseitige Abstand der Lamellen i und i',
- F den nutzbare Querschnitt des ganzen Kabels,
- F_i die nutzbare Querschnittsfläche der Lamelle i und i',
- S_i die auf Lamelle i entfallende Zugkraft,
- E_1 scheinbarer Elastizitätsmodul eines Einzelseiles.

Zustand 1.

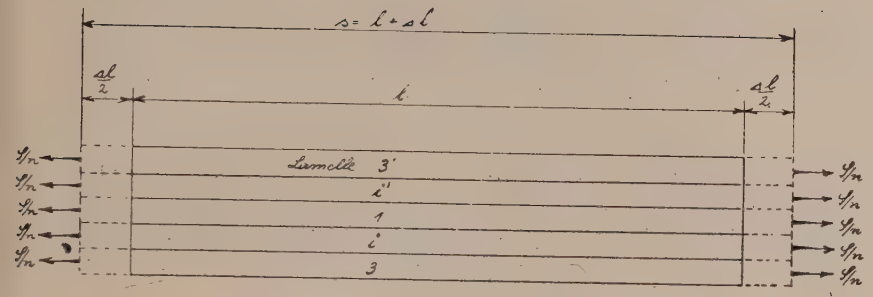

Abb. 13 a.

Zustand 2.

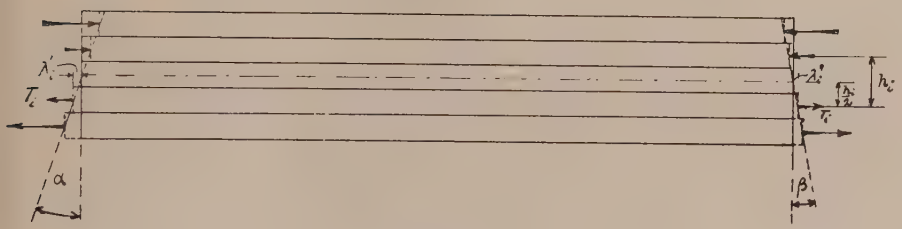

Abb. 13 b.

Zustand 3.

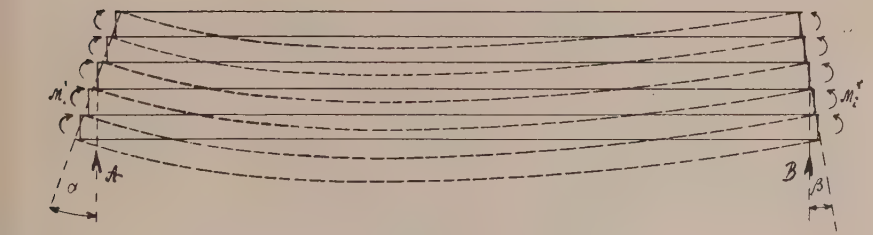

Abb. 13 c.

Außerdem soll festgelegt werden, daß das Kabel symmetrisch zur horizontalen Schwerpunktsachse gebaut sei.

Zustand 1 (Abb. 13a). Die Zugkraft S dehnt das Kabelstück von der ursprünglichen Länge l um das Stück Δl, wobei auf die Lamelle i die Teilkraft entfällt:

(1) $$\frac{S \cdot F_i}{F}$$

Zustand 2 (Abb. 13b). Die einzelnen Lamellen werden durch die noch zu bestimmenden Kräfte T_i gegeneinander verschoben. Dabei gilt unter Voraussetzung des Hookeschen Gesetzes

(2) $$\sigma = \varepsilon \cdot E_1$$

Für die Lamelle i wird

(3) $$\Delta s_i = \lambda_i' + \lambda_i''$$

wobei aus Abb. 13b zu ersehen ist, daß

(4) $$\begin{cases} \lambda_i' = \mp \dfrac{\alpha \cdot h_i}{2} & - \text{ für die obere Hälfte} \\ \lambda_i'' = \mp \dfrac{\beta \cdot h_i}{2} & + \text{ für die untere Hälfte} \end{cases}$$

Damit

(5) $$\Delta s_i = \mp \frac{h_i}{2} (\alpha + \beta)$$

und

(6) $$\varepsilon_i = \mp \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \frac{h_i}{s}$$

sodaß

(7) $$\sigma_i = \varepsilon_i E_1 = \mp \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \frac{h_i}{s} \cdot E_1$$

Außerdem ist

(8) $$\sigma_i = \frac{T_i}{F}$$

und mit Einsatz von (7)

(9) $$T_i = \sigma_i F_1 = \mp \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \frac{h_i}{s} \cdot F_i E_1$$

oder wenn man Δl gegenüber l vernachlässigt und

$$s = l$$

setzt

$$T_i = \mp \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \frac{h_i}{l} \cdot E_1 F_i \tag{10}$$

sodaß

$$S_i = \frac{SF_i}{F} \mp T_i \tag{11}$$

Zustand 3 (Abb. 13 c). An jeder Lamelle greifen jetzt noch zwei Momente an und zwar:

am linken Ende M_i'

am rechten Ende M_i''

d. h. wir haben für jede Lamelle den in Abb. 10 S. 20 dargestellten Belastungsfall, wobei wir für

$$M_a = M_i'$$
$$M_b = M_i''$$
$$S = S_i$$

zu schreiben haben.

Die auf S. 24 abgeleitete Gl. (20) lautet demnach

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{m_i}{S_i}\left[\dfrac{M_i' \operatorname{Cof} l m_i - M_i''}{\operatorname{Sin} l m_i}\right] - \dfrac{M_i' - M_i''}{S_i l} \\ -\beta = \dfrac{m_i}{S_i}\left[\dfrac{M_i' - M_i'' \operatorname{Cof} l m_i}{\operatorname{Sin} l m_i}\right] - \dfrac{M_i' - M_i''}{S_i l} \end{cases} \tag{12}$$

Durch Addition der beiden Gleichungen (12) erhält man

$$\alpha - \beta = \frac{m_i}{S_i \operatorname{Sin} l m_i}(\operatorname{Cof} l m_i + 1)(M_i' - M_i'') - 2\frac{M_i' - M_i''}{S_i l}$$

Führen wir die Funktionen der halben Winkel ein, so wird

$$\alpha - \beta = \frac{M_i' - M_i''}{S_i}\left(m_i \operatorname{Ctg} \frac{l m_i}{2} - \frac{2}{l}\right) \tag{13}$$

analog durch Subtraktion der beiden Gleichungen (12)

$$\alpha + \beta = \frac{M_i' + M_i''}{S_i} m_i \operatorname{Tg} \frac{l m_i}{2} \tag{14}$$

Die Auflösung nach M' und M'' liefert

$$(15)\qquad M_i' = S_i \frac{(\alpha+\beta)\left(\operatorname{Ctg}\frac{l\,m_i}{2} - \frac{2}{l\,m_i}\right) + (\alpha-\beta)\operatorname{Tg}\frac{l\,m_i}{2}}{2\operatorname{Tg}\frac{l\,m_i}{2}\left(\operatorname{Ctg}\frac{l\,m_i}{2} - \frac{2}{l\,m_i}\right) m_i}$$

$$(16)\qquad M_i'' = S_i \frac{(\alpha+\beta)\left(\operatorname{Ctg}\frac{l\,m_i}{2} - \frac{2}{l\,m_i}\right) - (\alpha-\beta)\operatorname{Tg}\frac{l\,m_i}{2}}{2\operatorname{Tg}\frac{l\,m_i}{2}\left(\operatorname{Ctg}\frac{l\,m_i}{2} - \frac{2}{l\,m_i}\right) m_i}$$

An der Lamelle i greift nach Gl. (11) noch die Achsialkraft

$$S_i = \frac{S\,F_i}{F} \mp T_i$$

an. Damit betragen die Momente am Kabelstück nach der Bezeichnung der Abb. 13 b und 13 c

$$(17)\qquad M' = \sum M_i' + \sum T_i h_i$$

$$(18)\qquad M'' = \sum M_i'' + \sum T_i h_i$$

Setzen wir nach Gl. (10)

$$T_i = \mp \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \frac{h_i}{l} \cdot E_1 F_i$$

so erhalten wir mit Gl. (15), (16)

$$(19)\qquad M' = \frac{\alpha+\beta}{2}\left[\frac{E_1}{l}\sum F_i h_i^2 + \sum S_i \frac{1 + \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\operatorname{Tg}\frac{l\,m_i}{2}}{\operatorname{Ctg}\frac{l\,m_i}{2} - \frac{2}{l\,m_i}}}{m_i \operatorname{Tg}\frac{l\,m_i}{2}}\right]$$

$$(20)\qquad M'' = \frac{\alpha+\beta}{2}\left[\frac{E_1}{l}\sum F_i h_i^2 + \sum S_i \frac{1 - \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\operatorname{Tg}\frac{l\,m_i}{2}}{\operatorname{Ctg}\frac{l\,m_i}{2} - \frac{2}{l\,m_i}}}{m_i \operatorname{Tg}\frac{l\,m_i}{2}}\right]$$

wobei nach S. 22 $m_i = \sqrt{\frac{S_i}{E_2 \cdot J_0}}$ ist. Über die Bedeutung von E_2 siehe S. 61.

Die Gleichungen (19) und (20) sollen nun angewendet werden für die Untersuchung der Biegungsspannungen im Kabel, das aus einer Anzahl patentverschlossener Kabel der Firma Felten & Guilleaume besteht, also eines Kabels, wie es seinerzeit beim Bau der Köln-Mühlheimer Straßenbrücke angewendet wurde.

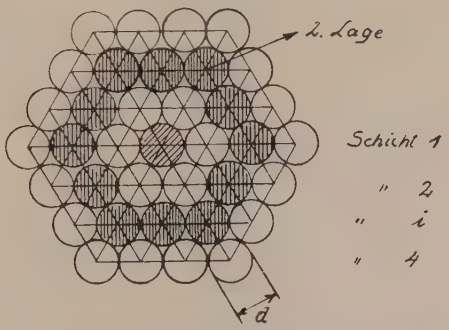

Abb. 14.

i = Ordnungszahl der Schicht
n_i = Anzahl der Stränge in der Schicht i
n = Anzahl aller Stränge im Querschnitt
a = Anzahl der Lagen um die „Seele"
i_a = Anzahl der Schichten einer Querschnittshälfte bei a vorhandenen Lagen.

Die allgemeine Anordnung eines solchen Kabels zeigt Abb. 14, die eines einzelnen Stranges Abb. 2.

Mit

$$F_0 = \varepsilon \frac{d^2 \pi}{4} \tag{20a}$$

sei der nutzbare Querschnitt mit J_0 das Trägheitsmoment eines einzelnen Stranges bezeichnet. Dann beträgt bei einer Anzahl von n Strängen für das ganze Kabel die Anzahl der Lagen

$$a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{4n-1}{3}} - 1\right) \tag{21}$$

und die Anzahl der Stränge in der Schicht

(22) $$n_i = 2a - (i-2)$$

oder unter Berücksichtigung von (21)

(23) $$n_i = \sqrt{\frac{4n-1}{3}} - (i-1)$$

Da ferner

(24) $$F_i = n_i F_0$$

und

(25) $$F = n F_0$$

so folgt

(26) $$\frac{F_i}{F} = \frac{n_i}{n}$$

Außerdem ist für den Strangdurchmesser d

(27) $$h_i^2 = 3 d^2 (i-1)^2$$

sodaß für den ersten Summanden der Gl. (19) und (20)

(28) $$\frac{E_1}{l} \sum F_i h_i^2 = \frac{E_1}{l} \sum n_i F_0 \cdot 3 d^2 (i-1)^2$$

geschrieben werden kann. Führen wir für n_i noch den Wert aus (23) ein, so erhalten wir

(29) $$\frac{E_1}{l} \sum F_i h_i^2 = \frac{E_1 F_0}{l} \cdot 3 d^2 \left[\sqrt{\frac{4n-1}{3}} \sum (i-1)^2 - \sum (i-1)^3 \right]$$

Da nach Abb. 14

(30) $$i_a = a + 1$$

wird in n ausgedrückt

(31) $$i_a = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{4n-1}{3}} + 1 \right)$$

sodaß

(32) $$\sum_{i=1}^{i=i_a} (i-1)^2 = \frac{i_a (i_a - 1)(2 i_a - 1)}{6}$$

und ähnlich

(33) $$\sum_{i=1}^{i=i_a} (i-1)^3 = \frac{[i_a (i_a - 1)]^2}{4}$$

Ersetzen wir nun wieder i_a durch (31), so erhalten wir nach einfacher Umformung für den Klammerausdruck der Gl. (29)

$$[\,] = \frac{5n^2 - 4n - 1}{108} \tag{34}$$

sodaß sich Gl. (29) schreiben läßt

$$\frac{E_1}{l} \sum F_i h_i^2 = \frac{E_1 F_0}{l} \cdot \frac{3 d^2 \pi \varepsilon}{4} \cdot \frac{4}{\varepsilon \pi} \cdot \frac{5n^2 - 4n - 1}{108}$$

woraus unter Beachtung von (25) folgt

$$\frac{E_1}{l} \sum F_i h_i^2 = \frac{E_1 F^2}{9 \varepsilon \pi l} \left(5 - \frac{4}{n} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{35}$$

da bereits bei nur einer Lage $n = 7$ ist, wird das dritte Glied im Klammerausdruck $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{49} = 0{,}0203$ klein gegenüber 5 und kann in den Grenzen der erstrebten Genauigkeit unbedenklich vernachlässigt werden, so daß schließlich

$$\frac{E_1}{l} \sum F_i h_i^2 = \frac{E_1 F}{9 \varepsilon \pi l} \left(5 - \frac{4}{n}\right) \tag{36}$$

Umformung des zweiten Summanden der Gl. (19).

Wie auf S. 58 gezeigt wird, kann $\mathfrak{Ctg} \frac{l m_i}{2}$ genau genug gleich 1 gesetzt werden, so daß

$$\sum S_i \frac{1 + \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \cdot \frac{\mathfrak{Tg} \frac{l m_i}{2}}{\mathfrak{Ctg} \frac{l m_i}{2} - \frac{2}{l m_i}}}{m_i \mathfrak{Tg} \frac{l m_i}{2}} = \sum \frac{S_i}{m_i} \left(1 + \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{l m_i}}\right) \tag{37}$$

mit $m_i = \sqrt{\frac{S_i}{E_2 J_i}}$ wird

$$\frac{S_i}{m_i} = \frac{S_i \sqrt{E_2 J_i}}{\sqrt{S_i}} \tag{38}$$

und da

$$J_i = n_i \cdot J_0 \tag{39}$$

erhalten wir nach einfacher Umformung

(40) $$\frac{S_i}{m_i} = \sqrt{n_i}\,\sqrt{E_2 J_0}\,\sqrt{S_i}$$

Die Bedeutung von E_2 siehe Anhang S. 62.

Für S_i hatten wir in Gl. (11) in Verbindung mit (25) gefunden

$$S_i = S\frac{n_i}{n} \mp T_i$$

sodaß wir mit der Beziehung der Gl. (10) schreiben können

(41) $$S_i = n_i\left(\frac{S}{n} \mp \frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{h_i}{l}\cdot E_1 F_0\right)$$

Diesen Ausdruck in Gl. (40) eingesetzt, liefert dann

(42) $$\frac{S_i}{m_i} = n_i\sqrt{E_2 J_0}\,\sqrt{\frac{S}{n} \mp \frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{h_i}{l}\cdot E_1 F_0}$$

womit Gl. (37) übergeht in

(43) $$\left\{\begin{array}{l} \sum S_i\,\dfrac{1+\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\cdot\dfrac{\mathfrak{Tg}\dfrac{l m_i}{2}}{\mathfrak{Ctg}\dfrac{l m_i}{2}-\dfrac{2}{l m_i}}}{m_i\,\mathfrak{Tg}\dfrac{l m_i}{2}} = \\ \sum n_i\sqrt{E_2 J_0}\,\sqrt{\dfrac{S}{n} \mp \dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\dfrac{h_i}{l}\cdot E_1 F_0}\left(1+\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{l m_i}}\right) \end{array}\right.$$

Den Ausdruck für (36) und (43) eingesetzt in (19) und (20) liefert schließlich die Gleichungen

(44) $$\left\{\begin{array}{l} M' = \dfrac{\alpha+\beta}{2}\left[\dfrac{E_1 F^2}{9\,\varepsilon\,\pi\,l}\left(5-\dfrac{4}{n}\right)\right. \\ \qquad \left. + \sum\sqrt{E_2 J_0}\cdot n_i\,\sqrt{\dfrac{S}{n} \mp \dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\dfrac{h_i}{l}\,E_1 F_0}\left(1+\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{l m_i}}\right)\right] \end{array}\right.$$

$$(45)\quad \left\{ \begin{aligned} M'' = \frac{\alpha+\beta}{2} \Bigg[& \frac{E_1 F^2}{9\,\varepsilon\,\pi\,l}\left(5-\frac{4}{n}\right) \\ & + \sum \sqrt{E_2 J_0}\; n_i \sqrt{\frac{S}{n} + \frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{h_i}{l} E_1 F_0}\left(1 - \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{l\,m_i}}\right)\Bigg] \end{aligned} \right.$$

Ein solches Gleichungspaar läßt sich nach den am Anfang dieses Abschnitts gemachten Bemerkungen für jedes Kabelfeld aufstellen.

Da in der vorliegenden Untersuchung nur der Größtwert der Biegungspannung, der beim Punkt 0 am Pylonensattel auftritt, interessiert, soll die weitere Ableitung nur für diesen Punkt durchgeführt werden.

Der Quotient $\frac{2}{l\,m_i}$ kann mit Rücksicht auf (39) und (41) geschrieben werden

$$(46)\qquad \frac{2}{l\,m_i} = \frac{2}{l}\cdot\frac{\sqrt{E_2 J_0}}{\sqrt{\frac{S}{n} + \frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{h_i}{l}\cdot E_1 F_0}}$$

sodaß damit Gl. (44) übergeht in

$$(47)\quad \left\{ \begin{aligned} M' = \sigma\frac{E_1 F^2}{18\,\varepsilon\,\pi\,l}\left(5-\frac{4}{n}\right) + \sum\frac{\sqrt{E_2 J_0}}{2}\cdot n_i \sqrt{\frac{S}{n} + \frac{\sigma}{2}\cdot\frac{h_i}{l} E_1 F_0} \\ \cdot\left(\sigma + \delta\frac{1}{1-\frac{2\sqrt{E_2 J_0}}{l\sqrt{\frac{S}{n}+\frac{\sigma}{2}\frac{h_i}{l}E_1 F_0}}}\right) \end{aligned} \right.$$

und Gl. (45) in

$$(48)\quad \left\{ \begin{aligned} M'' = \sigma\frac{E_1 F^2}{18\,\varepsilon\,\pi\,l}\left(5-\frac{4}{n}\right) + \sum\frac{\sqrt{E_2 J_0}}{2}\cdot n_i \sqrt{\frac{S}{n} + \frac{\sigma}{2}\cdot\frac{h_i}{l} E_1 F_0} \\ \cdot\left(\sigma + \delta\frac{1}{1-\frac{2\sqrt{E_2 J_0}}{l\sqrt{\frac{S}{n}+\frac{\sigma}{2}\frac{h_i}{l}E_1 F_0}}}\right) \end{aligned} \right.$$

wobei gesetzt wurde

(49) $$\alpha + \beta = \sigma$$

(50) $$\alpha - \beta = \delta$$

Der Wurzelausdruck der Gl. (47) und (48 läßt sich in eine Reihe entwickeln, die, nach dem zweiten Gliede abgebrochen — s. S. 62 —, lautet

(51) $$\sqrt{\frac{S}{n} + \sigma \frac{h_i}{2l} E_1 F_0} = \sqrt{\frac{S}{n}} \left(1 + \frac{\sigma}{2} \frac{E_1 F_0}{2l} h_i \frac{n}{S}\right)$$

bezw.

(52) $$\sqrt{\frac{S}{n} - \sigma \frac{h_i}{2l} E_1 F_0} = \sqrt{\frac{S}{n}} \left(1 - \frac{\sigma}{2} \frac{E_1 F_0}{2l} h_i \frac{n}{S}\right)$$

Da für jede einzelne Schicht des Kabelstückes ein solcher Wurzelausdruck vorkommt, kann geschrieben werden

(53) $$\left\{ M' = \sigma \frac{E_1 F_2}{18 \varepsilon \pi l} \left(5 - \frac{4}{n}\right) + \sqrt{\frac{S}{n}} \sqrt{E_2 J_0} \sum n_i \left(1 \mp \frac{\sigma}{2} \frac{E_1 F_0}{2l} h_i \frac{n}{S}\right) \cdot \left(\sigma + \delta \frac{l \sqrt{\frac{S}{n}} \left(1 + \frac{\sigma}{2} \frac{E_1 F_0}{2l} h_i \frac{n}{S}\right)}{l \sqrt{\frac{S}{n}} \left(1 \mp \frac{\sigma}{2} \frac{E_1 F_0}{2l} h_i \frac{n}{S}\right) - 2 \sqrt{E_2 J_0}} \right) \right.$$

analog der Ausdruck für M''.

Im Σ-Ausdruck kommt jeweils der Wert für eine Schicht i in der oberen und unteren Kabelhälfte, die symmetrisch zur horizontalen Schwerachse liegen, vor, also für die Schicht i in der oberen Hälfte der Summand

(54) $$n_i \left(1 - \frac{\sigma}{2} \frac{E_1 F_0}{2l} h_i \frac{n}{S}\right) \left(\sigma + \delta \frac{l \sqrt{\frac{S}{n}} \left(1 - \frac{\sigma}{2} \frac{E_1 F_0}{2l} h_i \frac{n}{S}\right)}{l \sqrt{\frac{S}{n}} \left(1 - \frac{\sigma}{2} \frac{E_1 F_0}{2l} h_i \frac{n}{S}\right) - 2 \sqrt{E_2 J_0}} \right)$$

und für die Schicht i in der unteren Hälfte

(55) $$n_i \left(1 + \frac{\sigma}{2} \frac{E_1 F_0}{2l} h_i \frac{n}{S}\right) \left(\sigma + \delta \frac{l \sqrt{\frac{S}{n}} \left(1 + \frac{\sigma}{2} \frac{E_1 F_0}{2l} h_i \frac{n}{S}\right)}{l \sqrt{\frac{S}{n}} \left(1 + \frac{\sigma}{2} \frac{E_1 F_0}{2l} h_i \frac{n}{S}\right) - 2 \sqrt{E_2 J_0}} \right)$$

Setzt man

$$\frac{E_1 F_0}{4l} h_i \frac{n}{S} = e \tag{56}$$

und

$$\frac{2\sqrt{E_2 J_0}}{l\sqrt{\frac{S}{n}}} = f \tag{57}$$

so lauten die Ausdrücke (54) und (55)

$$n_i(1 - e\sigma)\left(\sigma + \delta \frac{1 - e\sigma}{1 - e\sigma - f}\right) \tag{58}$$

bzw.

$$n_i(1 + e\sigma)\left(\sigma + \delta \frac{1 + e\sigma}{1 + e\sigma - f}\right) \tag{59}$$

Durch entsprechende Zusammenfassung liefert die Summe aus (58) und (59) für die beiden Lamellen i

$$2 n_i \left[\sigma + \delta\left(\frac{1 - f - e^2\sigma^2}{(1 - f)^2 - e^2\sigma^2} - e^2\sigma^2 \delta \frac{f}{(1 - f)^2 - e^2\sigma^2}\right)\right]$$

Zur Beurteilung der Größenordnung der einzelnen Glieder diene die folgende Überlegung.

Der maßgebende Wert für die Berechnung des Pylonenmomentes ist die Winkeländerung $\gamma_0 \approx -14{\cdot}00^{-3}$, während die Werte $\gamma_1 \gamma_2$ usw. nur etwa $0{,}6 \cdot 10^{-3}$ betragen. Nimmt man schätzungsweise an, daß beim Punkte „m“ α und β je die Hälfte von γ_m betragen, also etwa $0{,}3 \cdot 10^{-3}$, so folgt für das Feld 0—1, das den Ausschlag gibt

$$\sigma = (-14 + 0{,}3) \cdot 10^{-3} = -13{,}7 \cdot 10^{-3}$$
$$\delta = (-14 - 0{,}3) \cdot 10^{-3} = -14{,}3 \cdot 10^{-3}$$

In den übrigen Feldern wird σ und δ natürlich noch erheblich kleiner.

Den größten Wert für e erhalten wir für die äußerste Schicht, da diese das größte h_i aufweist, da

$$h_i = d\sqrt{3}(i - 1) \qquad \text{wird für } i = 4$$
$$h_i = 55{,}081$$

sodaß mit den in der Zahlenrechnung ermittelten Werten

$$e = \frac{95{,}203 \cdot 55{,}081}{2 \cdot 331{,}038} = 7{,}92$$

$$e^2 \cdot \sigma^2 = 7{,}92^2 \cdot 13{,}7^2 \cdot 10^{-6} = 0{,}01178$$

ferner ist

$$1 - f = 0{,}983\,378$$

sodaß der Wert für $e^2 \cdot \sigma^2$ im ungünstigsten Falle nur etwa $^1/_2\,^0/_0$ von $1 - f$ ausmacht und dagegen sowie gegen $(1 - f^2)$ vernachlässigt werden soll.

Das dritte Glied des Klammerausdruckes lautet dann

$$\delta \cdot 0{,}01178 \cdot \frac{f}{(1-f)^2}$$

und mit

$$\frac{f}{(1-f)^2} \approx 0{,}017 \quad \text{s. Zahlenrechnung}$$

$$\delta \cdot 0{,}01178 \cdot 0{,}017 = 0{,}00019\,\delta$$

ein Wert, der klein ist gegenüber σ und $\delta \frac{1}{1-f}$, somit ebenfalls vernachlässigt werden darf.

Zwei symmetrisch gelegene Schichten liefern demnach zum Summenausdruck der Gl. (53) den Beitrag

$$2\, n_i \left(\sigma + \delta \frac{1}{1-f}\right) \tag{60}$$

und die Schicht in der neutralen Achse des Gesamtkabels

$$n_i \left(\sigma + \delta \frac{1}{1-f}\right) \tag{60a}$$

Für ein und dasselbe Kabelfeld sind bei gegebenem Lastzustand σ und δ als konstant anzusehen, sodaß in Gl. (53) der Ausdruck

$$\sum n_i \left(1 \mp \frac{\sigma}{2} \frac{E_1 F_0}{2l} h_i \frac{n}{S}\right) \left(\sigma + \delta \frac{l \sqrt{\frac{S}{n}} \left(1 \mp \frac{\sigma}{2} \frac{E_1 F_0}{2l} h_i \frac{n}{S}\right)}{l \sqrt{\frac{S}{n}} \left(1 \mp \frac{\sigma}{2} \frac{E_1 F_0}{2l} h_i \frac{n}{S}\right) - 2 \sqrt{E_2 J_0}} \right)$$

übergeht in

(61)
$$\sum n_i \left(\sigma + \delta \frac{1}{1 - \frac{2\sqrt{E_2 J_0}}{l\sqrt{\frac{S}{n}}}} \right)$$

wobei

(62)
$$\sum n_i = n$$

Damit lautet Gl. (53)

(63)
$$M' = \frac{\sigma E_1 F^2}{18 \varepsilon \pi l}\left(5 - \frac{4}{n}\right) + \sqrt{\frac{S}{n}} \frac{\sqrt{E_2 J_0}}{2} n \left(\sigma + \delta \frac{1}{1 - \frac{2\sqrt{E_2 J_0}}{l\sqrt{\frac{S}{n}}}} \right)$$

Führt man wieder nach (49) und (50) die Winkel α und β ein, so erhält man nach Ordnen der Gleichung

(64)
$$\begin{cases} M' = \alpha \left[\frac{E_1 F^2}{18 \varepsilon \pi l}\left(5 - \frac{4}{n}\right) + n\sqrt{\frac{S}{n}}\sqrt{E_2 J_0} \frac{1 - \frac{\sqrt{E_2 J_0}}{l\sqrt{\frac{S}{n}}}}{1 - \frac{2\sqrt{E_2 J_0}}{l\sqrt{\frac{S}{n}}}} \right] \\ + \beta \left[\frac{E_1 F^2}{18 \varepsilon \pi l}\left(5 - \frac{4}{n}\right) - n\sqrt{\frac{S}{n}}\sqrt{E_2 J_0} \frac{\frac{\sqrt{E_2 J_0}}{l\sqrt{\frac{S}{n}}}}{1 - \frac{2\sqrt{E_2 J_0}}{l\sqrt{\frac{S}{n}}}} \right] \end{cases}$$

analog erhält man

$$(65)\quad \begin{cases} M'' = \alpha \left[\dfrac{E_1 F^2}{18 \varepsilon \pi l}\left(5 - \dfrac{4}{n}\right) - n \sqrt{\dfrac{S}{n}} \sqrt{E_2 J_0} \dfrac{\dfrac{\sqrt{E_2 J_0}}{l\sqrt{\dfrac{S}{n}}}}{1 - \dfrac{2\sqrt{E_2 J_0}}{l\sqrt{\dfrac{S}{n}}}} \right] \\ \quad + \beta \left[\dfrac{E_1 F^2}{18 \varepsilon \pi l}\left(5 - \dfrac{4}{n}\right) + n \sqrt{\dfrac{S}{n}} \sqrt{E_2 J_0} \dfrac{1 - \dfrac{\sqrt{E_2 J_0}}{l\sqrt{\dfrac{S}{n}}}}{1 - \dfrac{2\sqrt{E_2 J_0}}{l\sqrt{\dfrac{S}{n}}}} \right] \end{cases}$$

Die Formeln (64) und (65) folgen auch unmittelbar aus (19) und (20) S. 32, wenn man $\mathfrak{Tg}\dfrac{l m_i}{2}$ und $\mathfrak{Ctg}\dfrac{l m_i}{2}$ gleich 1 setzt und außerdem für S_i den konstanten Mittelwert $\dfrac{S}{n}$ einführt.

Für jedes Feld läßt sich ein solches Gleichungspaar aufstellen, wobei die Klammerausdrücke jeweils Feldkonstanten darstellen, die sich von vornherein bestimmen lassen und

M' sich auf das Moment am linken,

M'' auf das Moment am rechten Balkenende bezieht.

Es gilt somit allgemein für das Feld $(m-1)\,(m)$

$$(66)\quad \alpha_{m-1} = M'_{(m-1)\,m} \frac{\nu_m}{\nu_m^2 - \mu_m^2} - M''_{(m-1)\,m} \frac{\mu_m}{\nu_m^2 - \mu_m^2}$$

$$(67)\quad \beta_m = -M'_{(m-1)\,m} \frac{\mu_m}{\nu_m^2 - \mu_m^2} + M''_{(m-1)\,m} \frac{\nu_m}{\nu_m^2 - \mu_m^2}$$

dabei bedeutet ν den Klammerausdruck bei α,

μ „ „ „ β Gl. 64.

Die vorausgegangenen Untersuchungen wurden durchgeführt für ein zwischen zwei Schellen herausgeschnittenes Kabelstück. Da die Biegelinie des ganzen Kabels eine stetige ist, muß an jedem Knotenpunkt die Kontinuitätsbedingung erfüllt sein.

In Abb. 15 bedeutet:

ψ_m den ursprünglichen Sehnenwinkel,
ψ_m' den Sehnenwinkel nach der Durchbiegung,
α, β die Sehnen-Tangentenwinkel.

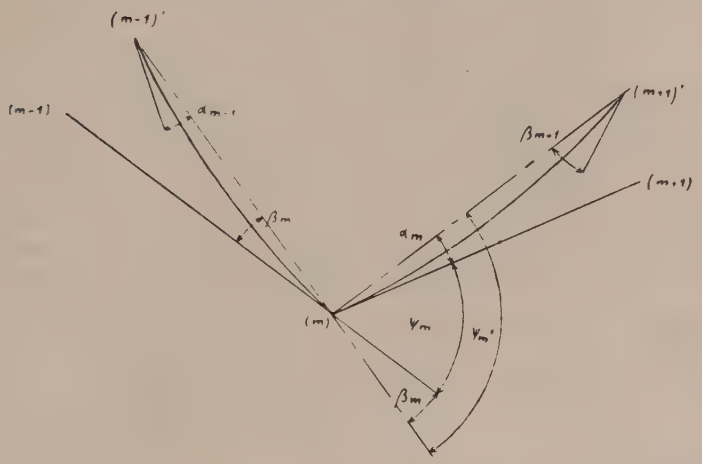

Abb. 15.

Nun ist die Änderung der Sehnenwinkel, die im Abschnitt I bereits abgeleitet wurde,

$$\gamma_m = \psi_m' - \psi_m$$

wobei

(68) $$\psi_m' = \psi_m + \alpha_m + \beta_m$$

sodaß

(69) $$\gamma_m = \alpha_m + \beta_m$$ folgt.

Im Feld $0-1$ ist bei Punkt 0 Einspannung vorhanden, sodaß

(70) $$\alpha_0 = \overline{\gamma}_0$$

Zur angenäherten Berechnung von M_0 soll wieder wie im Kapitel II das Moment am Punkte 3 gleich Null gesetzt werden, also

(71) $$M_3 = 0$$

Da an den Knotenpunkten keine äußeren Momente angreifen, gilt für Punkt (m)

(72) $$M''_{(m-1)\,m} = M'_{m\,(m+1)} = M_m$$

Damit ergibt sich folgendes Gleichungssystem

(73)
$$\begin{cases} \overline{\gamma}_0 = M_0 \dfrac{\nu_1}{\nu_1^2 - \mu_1^2} - M_1 \dfrac{\mu_1}{\nu_1^2 - \mu_1^2} \\ \beta_1 = M_0 \dfrac{\mu_1}{\mu_1^2 - \nu_1^2} - M_1 \dfrac{\nu_1}{\mu_1^2 - \nu_1^2} \\ \alpha_1 = M_1 \dfrac{\nu_2}{\nu_2^2 - \mu_2^2} - M_2 \dfrac{\mu_2}{\nu_2^2 - \mu_2^2} \\ \beta_2 = M_1 \dfrac{\mu_2}{\mu_2^2 - \nu_2^2} - M_2 \dfrac{\nu_2}{\mu_2^2 - \nu_2^2} \\ \alpha_2 = M_2 \dfrac{\nu_3}{\nu_3^2 - \mu_3^2} - 0 \\ \beta_3 = M_2 \dfrac{\mu_3}{\mu_3^2 - \nu_3^2} - 0 \end{cases}$$

wird zur Abkürzung gesetzt

(74)
$$\begin{cases} \nu_1^2 - \mu_1^2 = N_1 \\ \nu_2^2 - \mu_2^2 = N_2 \\ \nu_3^2 - \mu_3^2 = N_3 \end{cases}$$

so erhält man

(75)
$$\begin{cases} M_0 \dfrac{\nu_1}{N_1} - M_1 \dfrac{\mu_1}{N_1} = \overline{\gamma}_0 \\ -M_0 \dfrac{\mu_1}{N_1} + M_1 \left(\dfrac{\nu_1}{N_1} + \dfrac{\nu_2}{N_2} \right) - M_2 \dfrac{\mu_2}{N_2} = \gamma_1 \\ -M_1 \dfrac{\mu_2}{N_2} + M_2 \left(\dfrac{\nu_2}{N_2} + \dfrac{\nu_3}{N_3} \right) - M_3 \dfrac{\mu_3}{N_3} = \gamma_2 \end{cases}$$

Abschnitt III.

Zahlenbeispiel.

Für die Zahlenrechnung wurde ein Projekt zum Köln-Mülheimer Wettbewerb gewählt, für das dem Verfasser schon eine Reihe von Unterlagen zur Verfügung standen.

Es handelt sich dabei um eine Hängebrücke mit einer Öffnung von nahezu 340 m Stützweite und einem Versteifungsträger, der als Fachwerkträger ausgebildet ist. Die weiteren Abmessungen sind folgende:

$$l = n \cdot \lambda$$
$$= 56 \cdot 6{,}03 = 337{,}68 \text{ m Stützweite des Versteifungsträgers,}$$
$$\psi = \frac{f}{1} = \frac{1}{10} \text{ Pfeilverhältnis,}$$
$E_1 = 1600$ t/cm² der mittlere Elastizitätsmodul des Kabels,
$F = 2853$ cm² der Nutzquerschnitt desselben.

Die größten Biegungsmomente im Kabel treten natürlich an jenen Punkten auf, wo die Winkeländerungen zwischen zwei Kabelstücken am größten sind. Die Gl. (21) und (25) S. 13 lassen erkennen, daß die Winkeländerung γ_m im allgemeinen von der zweiten Differenz $\Delta^2 \eta_m$ derjenigen Durchbiegung abhängig ist, die der Versteifungsträger unter der betreffenden Belastung erfährt. Nur die Winkeländerung $\overline{\gamma}_0$ ist — abgesehen von den Konstanten — der Senkung η_1 des Knotenpunktes 1 im Versteifungsträger proportional, stellt also jedenfalls einen bedeutend größeren Wert dar, als alle anderen Winkeländerungen. Wenn wir uns ein Bild über die größtmöglichen Biegungsspannungen machen wollen, müssen wir demnach die größte Winkeländerung von $\overline{\gamma}_0$ suchen, die ihrerseits wie oben erwähnt von der Durchbiegung η_1 des Versteifungsträgers abhängt. Zur Ermittlung derjenigen Laststellung, die diesen Größtwert liefert, wurde die

Einflußlinie für η_1 ermittelt. Sie ergab einen S-förmigen Verlauf mit einem Wendepunkt nahe der Brückenmitte, sodaß wir mit halbseitiger Belastung der Brücke ziemlich genau die größte Durchbiegung η_1, also die größte Winkeländerung erhalten.

Für diesen Belastungsfall, der allen weiteren Zahlenrechnungen zugrunde gelegt wurde, hatte sich der Horizontalzug im Kabel ergeben zu

$$H_p = 1990 \text{ t}.$$

Nach Ermittlung der Biegelinie des Versteifungsträgers waren also sämtliche η_m, die zur Berechnung der Winkeländerungen nötig sind, gefunden (s. Tabelle 1 S. 46). Nach Gl. (19) S. 13 ergibt sich für d

$$d = \frac{1990}{1600 \cdot 2853} \cdot \frac{0{,}8616}{56} = 0{,}006707318 \cdot 10^{-3}$$

und nach Gl. (24) S. 25

$$d_0 = 0{,}006707318 \cdot 10^{-3} \frac{56-2}{2} = 0{,}1810998 \cdot 10^{-3}$$

Für β wird nach Gl. (29) S. 15 mit

$$r = 137 \text{ m}$$
$$h = 48 \text{ m}$$
$$\operatorname{tg} \tau = 0{,}475$$

$$\frac{H_p}{E_1 F} \cdot \frac{r}{h}(1+\operatorname{tg}^2\tau) = \frac{1990}{1600 \cdot 2853} \cdot \frac{137}{48}(1+0{,}475^2)$$
$$= 0{,}43587 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}85417 \cdot 1{,}22562$$
$$= 1{,}52473 \cdot 10^{-3}$$

Tabelle 1.

Pkt.	(1) η_m^{cm}	(2) $\Delta\eta_m^{cm}$	(3) $\Delta^2\eta_m^{cm}$	(4) $\frac{1}{\lambda}\frac{1}{cm}$	(5) $\Delta^2\eta_m \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot 10^3$	(6) d_0 d	(7) $\gamma_m \cdot 10^3$
0			−9,0283	$1{,}65837 \cdot 10^{-3}$	−14,97230	$d_0 = 0{,}1810998 \cdot 10^{-3}$	−14,79120
1	+ 9,0283	+9,0283	+0,3961		+ 0,65688		+ 0,65017
2	+17,6605	+8,6322	+0,3163		+ 0,52454		+ 0,51783
3	+25,9764	+8,3159	+0,5020		+ 0,83250		+ 0,82579
4	+33,7903	+7,8139	+0,4940		+ 0,81924		+ 0,81253
5	+41,1104	+7,3199	+0,5092		+ 0,84444	$d = 0{,}0067073 \cdot 10^{-3}$	+ 0,83773

Nach (26) S. 14 wird also

$$\bar{\gamma}_0 = (-14{,}79120 + 1{,}52473)\cdot 10^{-3} = \underline{-13{,}26647\cdot 10^{-3}}$$

Auflösung der Clapeyronschen Gleichungen.

a) Vollstab ohne Berücksichtigung der Achsialkräfte.

$M_3 = 0$ s. Gl. (8) S. 19.

Für die Zahlenrechnung ist es zweckmäßig, die aus der statischen Berechung der Hängebrücke bekannten Werte $\frac{l_i}{\lambda}$ einzuführen. Schreibt man ferner

$$\frac{6EJ}{\lambda} = a$$

und dividiert alle Gleichungen mit diesem Wert, so lauten die Gleichungen

$$2\frac{M_0}{a}\cdot\frac{l_1}{\lambda} + \frac{M_1}{a}\frac{l_1}{\lambda} = \bar{\gamma}_0$$

$$\frac{M_0}{a}\frac{l_1}{\lambda} + 2\frac{M_1}{a}\left(\frac{l_1}{\lambda} + \frac{l_2}{\lambda}\right) + \frac{M_2}{\lambda}\frac{l_2}{\lambda} = \gamma_1$$

$$\frac{M_1}{a}\frac{l_2}{\lambda} + 2\frac{M_2}{a}\left(\frac{l_2}{a} + \frac{l_3}{\lambda}\right) = \gamma_2$$

mit $\frac{l_1}{\lambda} = 1{,}07442$

$\frac{l_2}{\lambda} = 1{,}06927$

$\frac{l_3}{\lambda} = 1{,}06426$

wird

$$2\left(\frac{l_1}{\lambda} + \frac{l_2}{\lambda}\right) = 4{,}28738$$

$$2\left(\frac{l_2}{\lambda} + \frac{l_3}{\lambda}\right) = 4{,}26712$$

$$\frac{M_2}{a} = \left(0{,}51783 - \frac{M_1}{a} \cdot 1{,}06927\right) \frac{1}{4{,}26712} = 0{,}12135 - 0{,}25058 \frac{M_1}{a}$$

$$\frac{M_0}{a} \cdot 2{,}14884 + \frac{M_1}{a} \cdot 1{,}07442 = -13{,}26647 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{M_0}{a} \cdot 1{,}07442 + \frac{M_1}{a} \cdot 4{,}03680 = +0{,}52882 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{M_0}{a} = -7{,}197 \cdot 10^{-3}$$

Die sich daraus ergebende Spannung im Kabel s. S. 55.

Das auf diese Weise ermittelte Einspannungsmoment tritt in Wirklichkeit zweifellos nie auf; denn die Annahme eines Vollstabes an Stelle eines aus Einzelsträngen bestehenden Seiles ergibt eine rechnerische Steifigkeit, die um ein Vielfaches gegenüber den wirklichen Werten zu groß ist. Siehe auch S. 57.

b) Vollstab mit Berücksichtigung der Achsialkräfte.

Siehe Gl. (21) S. 27.

Während bei der Berechnung der Biegungsspannungen im Kabel ohne Berücksichtigung der Achsialkraft bei Errechnung der Sehnendrehwinkel die Querschnittsgrößen erst bei der Spannungsberechnung selbst in Erscheinung treten, müssen sie hier schon bei Ermittlung der Biegungsmomente in Rechnung gestellt werden.

Der gegebene Kabelquerschnitt

$$F_k = 2853 \text{ cm}^2$$

bestehe aus 37 Strängen von je 10,6 cm Durchmesser. Damit wird das auf die horizontale Achse bezogene Trägheitsmoment unter Außerachtlassung der sehr kleinen äquatorialen Trägheitsmomente nach Abb. 16

$$J_x = F_0 \left[12 \left(\frac{d\sqrt{3}}{2} \right)^2 + 10 \left(\frac{2d\sqrt{3}}{2} \right)^2 + 8 \left(\frac{3d\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right]$$

$$= F_0 \frac{d^2 \cdot 3}{4} (12 + 40 + 72)$$

$$= 124 \cdot F_0 \frac{3}{4} d^2 = 124 \cdot 77{,}10 \cdot \frac{3}{4} \cdot 112{,}36$$

$$J_x = 810000 \text{ cm}^4$$

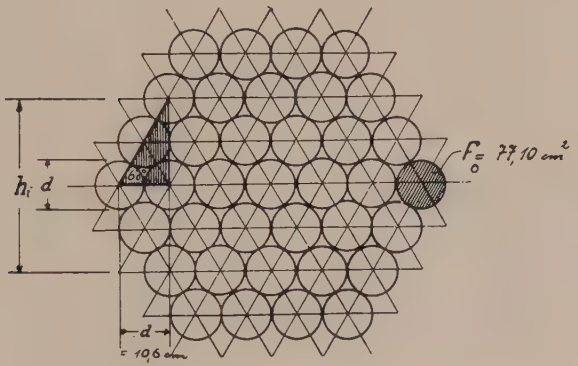

Abb. 16.

In der statischen Berechnung war für den Horizontalzug im Kabel gefunden worden

$H_g =$ 9410 t
$H_p =$ 1990 t (bei halbseitiger Belastung)
insgesamt $H =$ 11400 t

Da nach Gleichung (15) S. 27

$$l_r' = \frac{\nu_r'}{S_r l_r}$$

und

$$l_r'' = \frac{\nu_r''}{S_r l_r}$$

ist, so können wir mit

$$S_r = \frac{H}{\cos \varphi_r}$$

und $$l_r = \frac{\lambda}{\cos \varphi_r}$$

schreiben $$l_r' = \frac{\nu_r' \cos^2 \varphi_r}{H \cdot \lambda}$$

$$l_r'' = \frac{\nu_r'' \cos^2 \varphi_r}{H \cdot \lambda}$$

und $$l_r \cdot m_r = \frac{\lambda}{\cos \varphi_r} \sqrt{\frac{S_r}{EJ}}$$

$$= \frac{\lambda}{\cos \varphi_r} \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi_r}} \sqrt{\frac{H}{EJ}}$$

$$= \frac{\lambda}{\cos^{3/2} \varphi_r} \sqrt{\frac{H}{EJ}}$$

Mit diesen Größen lassen sich nun die hyperbolischen Funktionen aufschlagen; s. Gl. (5) und (6) S. 26 und dann die Koeffizienten ν' und ν'' ermitteln.

Diese liefern dann schließlich die reduzierten Längen l' und l''.

Bei der konstanten Feldweite $\lambda = 603$ cm wird

$$\lambda \sqrt{\frac{H}{EJ}} = 603 \sqrt{\frac{11400}{1600 \cdot 810000}} = 603 \sqrt{8{,}7963 \cdot 10^{-6}}$$

$$= 603 \cdot 2{,}9659 \cdot 10^{-3} \qquad = 1{,}78844$$

$$H \cdot \lambda = 11400 \cdot 603 \qquad = 6{,}8742 \cdot 10^6 \text{ tcm}$$

1. $$M_0 \cdot l_1' + M_1 l_1'' = \overline{\gamma}_0$$

2 $$M_0 l_1'' + M_1 (l_1' + l_2') + M_2 l_2'' = \gamma_1$$

3 $$M_1 l_2'' + M_2 (l_2' + l_3') = \gamma_2$$

aus 3

$$M_2 = (\gamma_2 - M_1 l_2'') \frac{1}{(l_2' + l_3')}$$

in 2

$$M_0 l_1'' + M_1 \left[(l_1' + l_2') - \frac{l_2''^2}{(l_2' + l_3')} \right] = \gamma_1 - \gamma_2 \frac{l_2''}{(l_2' + l_3')}$$

Tabelle 2.

		Feld 0—1	Feld 1—2	Feld 2—3	Feld 3—4
1	$\frac{1}{\cos\varphi}$	1,07442	1,06927	1,06426	1,05948
2	$\frac{1}{\cos^3\varphi}$	1,2402	1,2225	1,2055	1,1893
3	$\sqrt{\frac{1}{\cos^3\varphi}}$	1,1136	1,1057	1,0980	1,0906
4	$(lm)_r = 1{,}78844\sqrt{\frac{1}{\cos^3\varphi}}$	1,99161	1,97748	1,96371	1,95047
5	$\mathfrak{Tg}\,(lm)_r$	0,96343	0,96240	0,96137	0,96036
6	$\mathfrak{Sin}\,(lm)_r$	3,59541	3,54415	3,49269	3,44488
7	$\frac{lm}{\mathfrak{Tg}\,lm}$	2,06720	2,05474	2,04262	2,03098
8	$\frac{lm}{\mathfrak{Sin}\,lm}$	0,55393	0,55796	0,56223	0,56619
9	$\nu' = \frac{lm}{\mathfrak{Tg}\,lm} - 1$	1,06720	1,05474	1,04262	1,03098
10	$\nu'' = 1 - \frac{lm}{\mathfrak{Sin}\,lm}$	0,44607	0,44204	0,43777	0,43381
11	$\cos^2\varphi_m$	0,86627	0,87463	0,88283	0,89087
12	$\cos^2\psi \cdot \frac{1}{H\lambda}$	$0{,}12602 \cdot 10^{-6}$	$0{,}12723 \cdot 10^{-6}$	$0{,}12843 \cdot 10^{-6}$	$0{,}12960 \cdot 10^{-6}$
13	$l' = \frac{\nu' \cos^2\psi}{H\lambda}$	$0{,}13449 \cdot 10^{-6}$	$0{,}13419 \cdot 10^{-6}$	$0{,}13390 \cdot 10^{-6}$	$0{,}13322 \cdot 10^{-6}$
14	$l'' = \frac{\nu'' \cos^2\psi}{H\lambda}$	$0{,}05621 \cdot 10^{-6}$	$0{,}05624 \cdot 10^{-6}$	$0{,}05622 \cdot 10^{-6}$	$0{,}05622 \cdot 10^{-6}$

Mit den in Tabelle 2 S. 51 ermittelten Werten wird

$$(l_1' + l_2') = 0{,}26868 \cdot 10^{-6}$$
$$(l_2' + l_3') = 0{,}26809 \cdot 10^{-6}$$
$$l_2''^2 = 0{,}0031629 \cdot 10^{-12}$$
$$\frac{1}{(l_2' + l_3')} = 3{,}73009 \cdot 10^{-6}$$
$$\gamma_1 - \gamma_2 \frac{l_2''}{(l_2' + l_3')} = 0{,}54154 \cdot 10^{-3}$$
$$\frac{l_2''^2}{(l_2' + l_3')} = 0{,}01180 \cdot 10^{-6}$$
$$(l_1' + l_2') - \frac{l_2''^2}{(l_2' + l_3')} = 0{,}25688 \cdot 10^{-6}$$

(5) $M_0 \cdot 0{,}05621 \cdot 10^{-6} + M_1 \cdot 0{,}25688 \cdot 10^{-6} = 0{,}54154 \cdot 10^{-3}$

$$M_1 = \frac{1}{0{,}25688 \cdot 10^{-6}} (0{,}54154 \cdot 10^{-3} - M_0 \cdot 0{,}05621 \cdot 10^{-6})$$
$$= 2{,}10814 \cdot 10^{+3} - 0{,}21882\, M_0$$

(1) $M_0 \cdot 0{,}13449 \cdot 10^{-6} + 0{,}05621 \cdot 10^{-6} (2{,}10814 \cdot 10^{+3} - 0{,}21882\, M_0) = -13{,}26497 \cdot 10^{-3}$

$$M_0 (0{,}13449 \cdot 10^{-6} - 0{,}01230 \cdot 10^{-6}) = -13{,}26497 \cdot 10^{-3} - 0{,}11850 \cdot 10^{-3}$$
$$M_0 \cdot 0{,}12219 \cdot 10^{-6} = -13{,}38497 \cdot 10^{-3}$$
$$M_0 = \frac{-13{,}38497 \cdot 10^{-3}}{0{,}12219 \cdot 10^{-6}} = -109542 \text{ tcm}$$

Die sich hieraus ergebende Spannung im Kabel s. S. 55.

c) Das eingespannte Kabelstück.

(s. Gl. (75) S. 44).

$E_1 = 1600$ t/cm² Elastizitätsmodul des Kabels (als Mittelwert)
$F = 2853$ cm² gesamter Kabelquerschnitt (s. S. 45).
$n = 37$ Anzahl der Stränge im Kabel
$l = \frac{\lambda}{\cos \varphi}$ Länge einer Kabelsehne zwischen zwei Schellen

$\lambda = 603$ cm konstante Feldweite zwischen den Hängestangen

$\varphi =$ Neigungswinkel der Kabelsehne

$$\varepsilon = \frac{77{,}1}{\frac{d^2\pi}{4}} = \frac{77{,}1 \cdot 4}{10{,}6^2 \cdot 3{,}1416} = 0{,}8736$$ Verhältniszahl

vom wahren Strangquerschnitt zur Kreisfläche.

$$\frac{E_1 \cdot F^2}{18 \cdot \varepsilon \cdot \pi \cdot l}\left(5 - \frac{4}{n}\right) = \frac{1600 \cdot 2853^2}{18 \cdot 3{,}1416 \cdot 603 \cdot 0{,}8736}\left(5 - \frac{4}{37}\right) \cdot \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{21\,386\,86}{\cos\varphi}$$

$J_0 = 2{,}18$ cm^4 Trägheitsmoment eines einzelnen patentverschlossenen Seiles (s. Anhang S. 61).

$E_2 = k \cdot E = k \cdot 2100$ $E_2 J_0 = k \cdot 2100 \cdot 2{,}18$ (s. S. 62).

Für 6 verschiedene willkürlich gewählte Werte des Koeffizienten k wurden, nachdem die Konstanten tabellarisch ermittelt waren, die Gl. (75) S. 44 aufgelöst und die aus den Momenten M_0 errechneten Spannungen in der Tabelle auf S. 54 aufgetragen.

Spannungsberechnung.

Wir hatten im durchgeführten Zahlenbeispiel stets nur die Momente berechnet. Wir wollen jetzt noch die Spannungen, welche sie im Kabel hervorrufen, ermitteln, um ein Bild zu gewinnen, in welcher Größenordnung sie stehen im Vergleich zu den Grundspannungen.

Das Trägheitsmoment des Kabelquerschnitts wurde bereits auf S. 49 zu

$$J_x = 810\,000 \text{ cm}^4$$

ausgerechnet.

Der Abstand der äußersten Faser von der horizontalen Symmetrieachse errechnet sich zu

$$e = \frac{3d}{2}\sqrt{3} + \frac{d}{2} = \frac{d}{2}\left(3\sqrt{3} + 1\right) = 32{,}85 \text{ cm}$$

sodaß das Widerstandsmoment beträgt:

$$W_x = \frac{810\,000}{32{,}85} = 24\,650 \text{ cm}^3$$

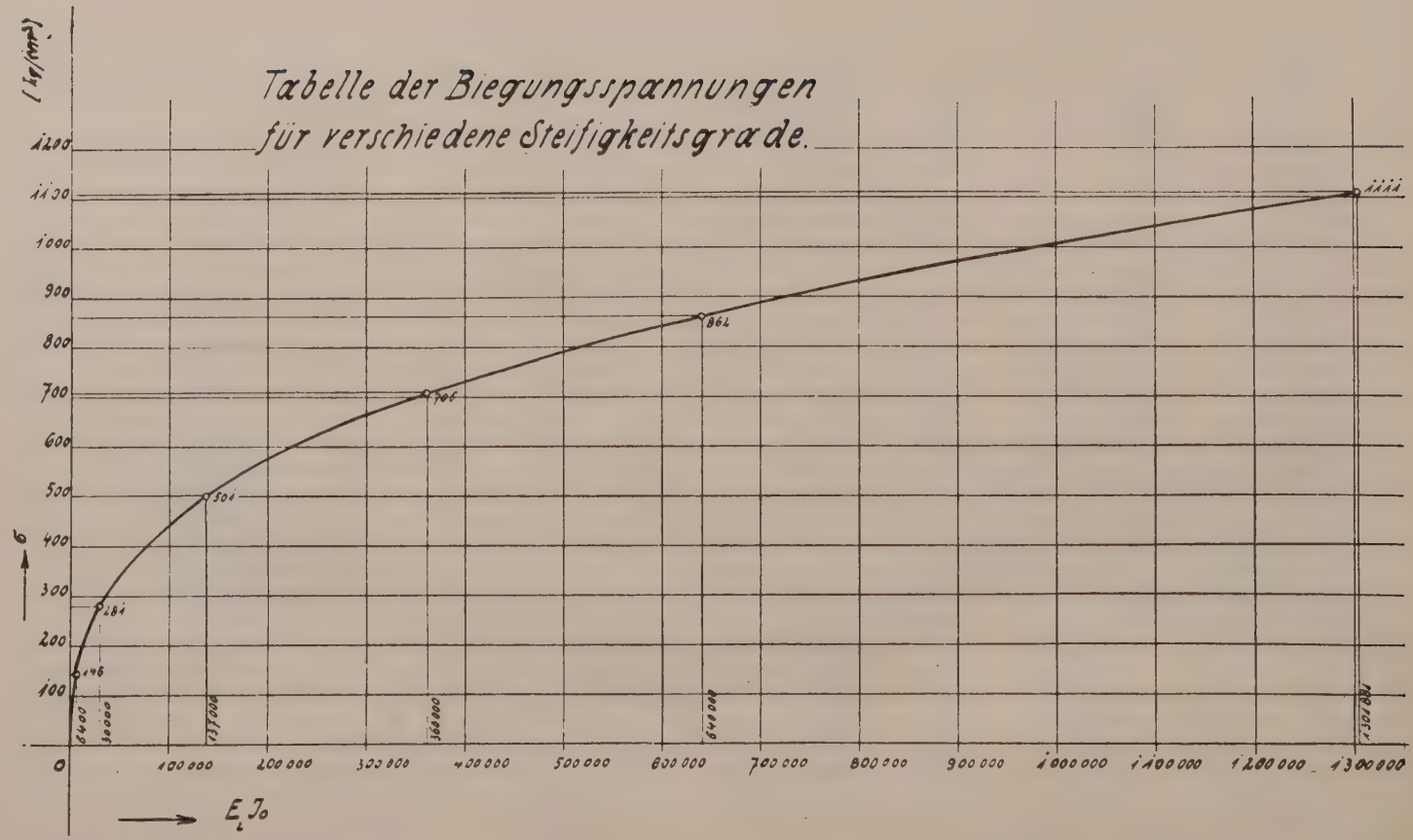
Tabelle der Biegungsspannungen
für verschiedene Steifigkeitsgrade.
(kg/mm²)
σ
E_t J_0
0
100 000
200 000
300 000
400 000
500 000
600 000
700 000
800 000
900 000
1 000 000
1 100 000
1 200 000
1 300 000
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
1100
1200
146
281
501
706
862
1111
54 00
30 000
137 000
360 000
640 000
1301 01

In Abschnitt II Teil A waren erst die Momente $\frac{M}{a}$ gefunden worden, sodaß wir, um die einzelnen Ergebnisse miteinander vergleichen zu können, jene Werte noch mit a zu multiplizieren haben, wobei nach Gl. (2) S. 17

$$a = \frac{6EJ}{\lambda} = \frac{6 \cdot 1600}{603} \cdot 810\,000 = 12{,}895522 \cdot 10^6$$

a) Wir bekommen also aus den Clapeyronschen Gleichungen ohne Berücksichtigung der Achsialkraft nach S. 48

$$\sigma = -\frac{7{,}197 \cdot 10^{-3} \cdot 12{,}89552 \cdot 10^6}{24\,650} = \underline{-3765 \text{ kg/cm}^2}$$

b) Aus den Clapeyronschen Gleichungen mit Berücksichtigung der Achsialkraft nach S. 27

$$\sigma = -\frac{109\,542}{24\,650} = \underline{-4444 \text{ kg/cm}^2}$$

das sind $$\frac{4444}{3765} = 1{,}18$$

rund 18 v. H. größere Spannung als bei Fehlen der Längsspannung.

c) Aus den Gleichungen für das zusammengesetzte Kabelstück wurden wie auf S. 53 erwähnt für verschiedene Werte $E_2 J_0$ die Spannungen errechnet. Die dafür gefundenen Werte sind auf S. 54 in einem Koordinatensystem aufgetragen, in dem die Abszissen die Steifigkeitswerte $E_2 J_0$, die Ordinaten die im Kabel entstehenden Biegungsspannungen darstellen.

Je nach der Wahl des Wertes $E_2 J_0$ könnte demnach die Biegungsspannung für den vorliegenden Fall theoretisch zwischen den Werten 0 und 1111 kg/cm² liegen. Dabei ist jedoch folgendes zu berücksichtigen.

1. Die untere Grenze.

Schon der Modellversuch hat ergeben, daß sich die Reibung zwischen den Drähten auch ohne Vorhandensein einer Längs-

kraft derart bemerkbar macht, daß der wirkliche Wert das 6,5-fache des theoretischen ausmacht. Die Kabelzugkraft wirkt aber zweifellos in hohem Maße im Sinne einer Versteifung des Kabels.

Wenn ohne Zugkraft der theoretische Wert durch die Reibung um das 6,5-fache vergrößert wurde, so wird dieser Wert durch die hinzukommende Längskraft wahrscheinlich ebenfalls um ein Vielfaches erhöht, mindestens soll aber angenommen werden

$$k = 1{,}5 \cdot 6{,}5 \approx 10$$

und $$E_2 J_0 = 10 \cdot 2100 \cdot 2{,}18 \approx 50\,000.$$

Zur Ermittlung eines genauen Wertes für k sind in jedem Einzelfalle Biegeversuche an einem naturgroßen Seilstück bei gleichzeitigem Vorhandensein einer Längskraft erforderlich.

Für den geschätzten Mindestwert

$$E_2 J_0 \approx 50\,000$$

ergibt die Spannungslinie

$$\underline{\sigma = 340 \text{ kg/cm}^2}$$

als untere Grenze.

2. Die obere Grenze.

Wenn die Einzeldrähte im Seil sich gegeneinander überhaupt nicht mehr verschieben können, der Einzelstrang also wie ein voller Rundstab wirken würde (nur theoretischer Grenzfall), so wäre

$$J_0 = \frac{\pi d^4}{64} \cdot \varepsilon^2$$

wobei

$$d = 10{,}6 \text{ cm}$$
$$\varepsilon = 0{,}8736 \text{ (s. S. 53).}$$

damit wird

$$E_2 J_0 = \frac{2100 \cdot 3{,}14 \cdot 10{,}6^4 \cdot 0{,}8736^2}{64} \approx 1\,000\,000$$

Dieser Wert beträgt rund das 20fache der unteren Grenze. Nimmt man als möglichen Wert für die obere Grenze etwa den

5—10fachen Wert der unteren, im Mittel den etwa 8fachen, so ist damit

$$E_2 J_0 = 8 \cdot 50\,000 = 400\,000.$$

Für diesen Wert gibt die Spannungslinie

$$\sigma = 730 \text{ kg/cm}^2$$

als obere mögliche Grenze.

Etwa von diesem Punkte ab verläuft auch die Spannungslinie schon sehr flach, d. h. eine Erhöhung des Wertes $E_2 J_0$ gibt keine wesentliche Spannungserhöhung.

3. Mittelwert.

Als Mittelwert soll das arithmetische Mittel aus dem wahrscheinlichen unteren und oberen Grenzwert gelten

$$\sigma = \frac{340 + 730}{2} = \underline{540 \text{ kg/cm}^2}$$

Bei einer zulässigen Spannung von

$$\sigma = 5000 \text{ kg/cm}^2$$

beträgt demnach die zusätzliche Biegungsspannung

rd. 11 v. H.

Anhang.

1. Auf S. 35 wurde behauptet, daß

$$\mathfrak{Ctg}\,\frac{l\,m_i}{2}=1$$

gesetzt werden dürfe. Für den Punkt 0 wurde der Ausdruck

$$\frac{2}{l\,m_i}$$

für jede Lamelle berechnet und in Tabelle 3 zusammengestellt.

Tabelle 3.

1.	2.	3.	4.
Lamelle	$\frac{2}{l_1 m_i}$	$\frac{l_1 m_i}{2}$	$\mathfrak{Ctg}\,\frac{l_1 m_i}{2}$
4′	0,01870	~ 54	1,00000...
3′	0,01792	~ 56	1,00000...
2′	0,01724	~ 58	1,00000...
1	0,01662	~ 60	1,00000...
2	0,01607	~ 62	1,00000...
3	0,01556	~ 64	1,00000...
4	0,01510	~ 66	1,00000...

Aus den Tafeln von Hayashi ist zu ersehen, daß bereits der hyperbolische Cotangens von zwanzig 10 Nullen hinter dem Komma hat, sodaß die Berechtigung der Behauptung

$$\mathfrak{Ctg}\,\frac{l\,m_i}{2}=1$$

erwiesen ist.

2. Für das Trägheitsmoment des einzelnen patentverschlossenen Kabels wurde annähernd

$$J_0 = 2{,}18\ \text{cm}^4$$

ermittelt. Denn nach Woernle[1]) „darf ein Seil hinsichtlich der Ermittlung der Biegungsbeanspruchung als Drahtbiegung aufgefaßt werden . . .“.

Die Gesamtheit der Drähte stellt, dem Zusammenhang der Drähte im Verbande des Seiles entsprechend — durch diesen Zusammenhang ist die elastische Linie der Drähte vorgeschrieben — als Ganzes gleichsam einen einzigen Profildraht (s. Abb. 17) dar, der sich in seiner Durchbiegung analog wie das Seil selbst verhält (bei Vernachlässigung der Reibung zwischen den Drähten).

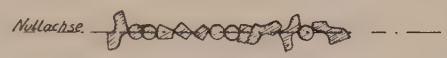

Abb. 17.

In den Ableitungen auf S. 30 ff. mußte in Ermanglung bekannter Werte mit zwei verschiedenen Elastizitätsmodulen E_1 und E_2 gerechnet werden. Dabei ist E_1 der scheinbare Elastizitätsmodul eines Seiles bei reiner Längsbeanspruchung, E_2 der scheinbare Elastizitätsmodul bei Seilbiegung.

Um über die Größenordnung dieser Kräfte einen ungefähren Anhaltspunkt zu erhalten, wurde ein Kabelstück in verkleinertem Maßstab hergestellt, mit dem eine Reihe von Biegungsversuchen vorgenommen wurde. Von der gleichzeitigen Wirkung der im Brückenkabel vorhandenen Längskraft wurde bei den Versuchen abgesehen, um die Versuchsanordnung tunlichst leicht und einfach zu halten. Es wurde also nur das Verhalten eines Kabelstückes, bestehend aus 37 Patentseilen untersucht, auf das an seinen beiden Enden gewisse Biegungsmomente wirken.

Auf Grund der Ableitung auf den Seiten 31 ff. ergeben sich dann unter der gemachten Voraussetzung

$$S = 0$$

die Formeln (64 a) und (65 a) wobei E_2 aus besonderen Versuchen gewonnen wurde (s. S. 68).

---

[1]) Woernle, Zur Beurteilung der Drahtseilschwebebahnen für Personenbeförderung, Zeitschrift des Verbandes Deutscher Diplom-Ingenieure 1913.

(64 a)
$$\begin{cases} M' = \alpha \left[\dfrac{E_1 F^2}{18 \pi l \varepsilon} \left(5 - \dfrac{4}{n}\right) + \dfrac{4 E_2 J_0 n}{l} \right] \\ \quad + \beta \left[\dfrac{E_1 F^2}{18 \pi l \varepsilon} \left(5 - \dfrac{4}{n}\right) + \dfrac{2 E_2 J_0 n}{l} \right] \end{cases}$$

(65 a)
$$\begin{cases} M'' = \alpha \left[\dfrac{E_1 F^2}{18 \pi l \varepsilon} \left(5 - \dfrac{4}{n}\right) + \dfrac{2 E_2 J_0 n}{l} \right] \\ \quad + \beta \left[\dfrac{E_1 F^2}{18 \pi l \varepsilon} \left(5 - \dfrac{4}{n}\right) + \dfrac{4 E_2 J_0 n}{l} \right] \end{cases}$$

In diesen Formeln sind alle Größen bis auf den Wert E_1 u. E_2 bekannt.

Setzt man $E_1 = \mu E$

wobei E = 2100 t/cm² den Elastizitätsmodul des Drahtes,

μ = eine Zahl kleiner als 1,

E_1 = den scheinbaren Elastizitätsmodul eines Einzelseiles bei Längsbeanspruchung bezeichnet;

so kann man μ aus den verschiedenen Versuchsreihen durch Einsetzen der abgelesenen Winkel α und β sowie der eingeführten Momente M' und M'' in (64 a) und (65 a) ermitteln.

Wie die Ergebnisse auf S. 70 zeigen, kann μ genau genug als Konstante für die bei den Versuchen durchgeführten Belastungen und Winkeländerungen angenommen werden und zwar

$$\mu = 0{,}21$$

Es wäre also der scheinbare Elastizitätsmodul

$$E_1 = 0{,}21 \cdot 2100 = \mathbf{441}\ \text{t/cm}^2.$$

Der außerordentlich kleine Wert läßt sich durch folgende Überlegung erklären:

a) Bei einem nicht vorgereckten Kabel tritt die federnde Wirkung der Einzeldrähte noch stark in Erscheinung.

b) Bei den verhältnismäßig kleinen Biegungsmomenten, die den Versuchen zugrunde liegen, treten nur kleine Längsbeanspruchungen in den Einzelseilen auf, sodaß die Reibung zwischen den einzelnen Drähten noch nicht so stark in Erscheinung tritt wie beim straff gespannten Seil.

Bei unseren Versuchen betrug das größte Moment

$$M' = M'' = 26{,}65 \text{ tcm}$$

Dabei war das Trägheitsmoment (s. S. 49)

$$J_x = 124 \; F_0 \frac{3}{4} d^2$$

$$e = \frac{3}{2} d\sqrt{3}$$

$$W_x = 124 \, F_0 \cdot \frac{3}{4} d^2 \cdot \frac{2}{3 d\sqrt{3}} = 35{,}8 \cdot 3{,}4 \cdot 2{,}2$$

$$= 268 \text{ cm}^3$$

$$\max \sigma = \frac{26650}{268} = 99{,}5 \text{ kg/cm}^2$$

Aus der Spannungs-Dehnungslinie für das Brückenkabel der Straßenbrücke Köln—Mülheim (s. Wilhelm Ernst u. Sohn S. 93) ergibt sich bei dieser Spannung für das Einzelseil

$$E_1 = 410 \text{ t/cm}^2.$$

Betrachtung des Wertes $E_2 J_0$.

Setzt man nach Wörnle (s. S. 59) J_0 gleich der Summe der Trägheitsmomente aller Einzeldrähte, so erhält man für das Versuchskabel angenähert

16 Profildrähte $16 \cdot \frac{0{,}2 \cdot 0{,}40^3}{12} = 0{,}0171$

15 Keildrähte $15 \cdot \frac{0{,}30 \cdot 0{,}28^3}{12} = 0{,}0082$

7 Runddrähte $7 \cdot \frac{0{,}27^4}{64} = 0{,}0005$

$0{,}0258 \text{ cm}^4$

mit $E = 2100$

wäre $E \cdot J_0 = 2100 \cdot 0{,}0258 = 54{,}2 \text{ tcm}^2$

Durch Versuche (s. S. 68) wurde der Wert

$$E_2 \cdot J_0 = 350 \text{ t/cm}^2$$

gefunden, also ein Wert, der den theoretischen Wert bei weitem übersteigt, und zwar um das

$$\frac{E_2 \cdot J_0}{E \cdot J_0} \frac{350}{54{,}2} = 6{,}5\,\text{fache}$$

$$\text{also } E_2 = 6{,}5 \cdot E$$

Die Erklärung liegt darin, daß beim Biegen eines Stranges die einzelnen Drähte nicht aneinander vorbeigleiten können, wie bei einer Längsbeanspruchung, sondern daß die einzelnen Spiralen ineinander gedrückt werden, sich gewissermaßen miteinander verklemmen und dadurch starke Reibungskräfte auftreten, die praktisch auf eine wesentliche Erhöhung der Steifigkeit hinauslaufen.

Wendet man nun die aus den Versuchen gewonnenen Erkenntnisse an auf die Berechnung der Zusatzspannung infolge Biegung in einem Brückenkabel mit großen Zugkräften, so hat man von den Formeln (64) und (65) S. 42 auszugehen, die zu dem Gleichungssystem (75) auf S. 44 führten.

Für den Wert E_1 führt man nun einen Elastizitätsmodul ein, der aus zahlreichen Versuchen solcher Kabel für den hier in Frage kommenden Spannungsbereich als Mittelwert

$$E_1 = 1600\ \text{t/cm}^2$$

gefunden wurde.

Für E ist jedoch der bekannte Wert

$$E = 2100\ \text{t/cm}^2$$

einzuführen, da er sich ja auf die Biegungssteifigkeit eines Einzeldrahtes (siehe oben) bezieht.

Die Reibung zwischen den Einzeldrähten wird dadurch berücksichtigt, daß anstatt des Wertes E, der Wert $E_2 = k\,E$ eingeführt wird.

Siehe Zahlenrechnung.

3. Die auf S. 38 in eine Reihe entwickelte Wurzel wurde nach dem 2. Gliede abgebrochen.

$$\sqrt{c + \sigma\, h_i\, d} = \sqrt{c}\left(1 + \frac{\sigma\, h_i\, d}{c}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Die Reihe ist konvergent, da, wie aus der folgenden Rechnung hervorgeht,

$$\frac{\sigma h_i d}{c} < 1$$

Für den Wert

$$d = \frac{E_1 F_0}{2 l} = \frac{1600 \cdot 77{,}1}{2 \cdot 603 \cdot 1{,}07}$$

erhält man $d \approx 96$

und den Größtwert von h_i (s. S. 39)

$$h_i \approx 55$$

wird $h_i \cdot d = 55 \cdot 96 = 5280$.

$$\sigma = \alpha + \beta$$

erreicht seinen Größtwert am Pylonenkopf, wo

$$\sigma_0 = \overline{\gamma_0} \approx 13 \cdot 10^{-3} \text{ ist}$$

und damit

$$\sigma h_i d = 13 \cdot 10^{-3} \cdot 5280 = 69 \text{ wird.}$$

Führt man noch einen Durchschnittswert für c ein (s. S. 49)

$$c = \frac{S}{n} = \frac{H}{n \cdot \cos \varphi}$$

$$c = 330$$

dann wird

$$\frac{\sigma h_i d}{c} = \frac{69}{330} = 0{,}209 < 1$$

Zur Beurteilung der Größenanordnung der einzelnen Summanden sollen noch die ersten 4 Glieder der Reihe zahlenmäßig bestimmt werden.

1. Glied $= 1{,}00000$
2. Glied $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma h_i d}{c} = 0{,}10450$
3. Glied $-\frac{1}{8} \left(\frac{\sigma h_i d}{c}\right)^2 = -0{,}00546$
4. Glied $+\frac{1}{16} \left(\frac{\sigma h_i d}{c}\right)^3 = +0{,}00057$

Da das 3. Glied bereits nur noch etwa 5‰ zum Summenwert der Reihe beiträgt und die weiteren Glieder sehr rasch abnehmen, ist die Berechtigung zum Abbruch nach dem 2. Gliede erbracht.

Biegeversuche am Kabelmodell.

Wie im Anhang S. 59 bereits angeführt wurde, sind die Steifigkeitsverhältnisse bei einem Kabelstück, wie es in Abschnitt II behandelt wurde, rein theoretisch nicht zu erfassen. Aus diesem Grunde wurden an einem unten näher beschriebenen Kabelstück im Laboratorium für Statik und Festigkeitslehre an der Technischen Hochschule Breslau Biegeversuche vorgenommen. Die große Genauigkeit der dabei verwendeten Meßgeräte erlaubte mit genügender Sicherheit Schlüsse auf das elastische Verhalten auch eines großen Brückenkabels zu ziehen.

1. Beschreibung des Versuchskörpers.

Das zum Versuch verwendete Kabelstück *K* besteht aus 37 Einzelseilen in patentverschlossener Bauart der Fa. Deichsel (Oberschlesien). Jedes Seil hat eine Länge von 2,0 m und einen Durchmesser von 22 mm. Das Einzelseil selbst besteht wiederum aus:

16 Z-förmigen Profildrähten
15 Keildrähten
6 Runddrähten und
1 Kerndraht.

Das Gewicht des Einzelseiles beträgt ca. 2,7 kg/m und besitzt eine Zugfestigkeit von 120 kg/mm². Der Querschnitt ist aus nachstehender Abbildung ersichtlich. Die einzelnen Seile wurden mit Hilfe einer Schablone in Sechseckform zusammengebaut und durch Drahtschlingen gehalten. Die Enden erhielten kräftige aus zusammengeschweißten Eisenblechen konstruierte Schellen, die halbteilig ausgeführt waren und durch Schrauben derart fest aneinandergepreßt wurden, daß die Einzelseile auch bei erheblichen Kräften gegenseitig in den Schellen nicht verschoben werden

konnten, wie es in Wirklichkeit an den Kabelschellen selbst auch verlangt ist. Der lichte Abstand zwischen den inneren Kanten

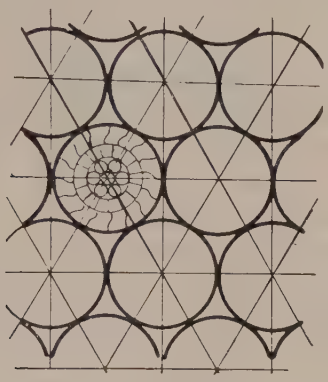

Abb. 18.

der Schellen betrug 1200 mm. Die übrigen Einzelheiten gehen aus Abb. 18 u. 21 hervor.

2. Allgemeine Versuchsanordnung.

Um in das Kabel an den beiden Enden je ein Moment einleiten zu können, wurde eine Stahlkonstruktion ausgebildet, deren allgemeine Anordnung aus Abb. 19 S. 66 zu ersehen ist. Bei dieser Einrichtung war es möglich, durch Verlegen des Druckpunktes auf der oberen Traverse die Momente am linken und rechten Kabelende beliebig zu wählen. Die zangenförmige Konstruktion, wie sie aus der Abbildung hervorgeht, war erforderlich, um die Drücke, die von der Presse unmittelbar ausgeübt werden, für die gewünschten verhältnismäßig kleinen Momente zu verkleinern. Die Hebelübersetzung bei dieser Einrichtung betrug etwa 1 : 10. Um zu vermeiden, daß bei Durchbiegung des Kabels, also bei einer Drehung der Schellen Klemmungen oder Zwängungen auftreten, war die eine Seite der Auflagerung mit Hilfe von Winkeln als Schneidenlagerung ausgebildet, während die andere Schelle sowohl nach unten, als auch nach oben, auf beweglichen Rollen lag.

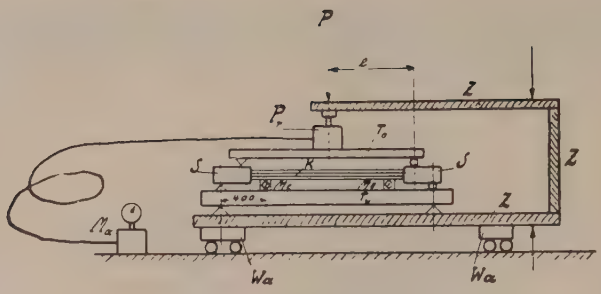

Abb. 19.

Z = Zange	S = Schelle
T_o = obere Traverse	K = Kabel
T_u = untere Traverse	P_r = Preßtopf
W_a = Wagen	M_a = Manometer.

Der Preßtopf P_r war mit einem Manometer M_a verbunden, sodaß der tatsächlich vorhandene Druck auf die Versuchseinrichtung abgelesen werden konnte. Je nach der Stellung des Preßtopfes auf der Traverse T_o wurde der Abstand e gemessen und daraus die Größe der wirklich beim festen und beim beweglichen Auflager eingeführten Momente

$$M' \text{ und } M''$$

errechnet.

Die Zwischenschaltung der unteren Traverse T_u war notwendig, da sonst die Meßuhren auf dem unteren Arm der Zange aufgestützt wären, einen Konstruktionsteil, der selbst auch eine Durchbiegung erhält, während T_u auch beim Versuch spannungslos bleibt.

Die beiden Wagen W_a dienten zum Ein- und Ausfahren der gesamten Versuchseinrichtung unter die Presse.

3. Die Durchführung der Versuche.

Zunächst wurde das Kabel durch eine Reihe von Vorbelastungen und Entlastungen beansprucht, sodaß die zufällig vorhandenen Ungenauigkeiten ausgeglichen worden sind. Der Beweis dafür folgt aus dem fast völlig elastischen Verhalten bei Be- und

Entlastung nach diesen Vorbelastungen. Die Winkeldrehungen, die bei den Versuchsergebnissen gemessen waren, wurden nicht unmittelbar abgelesen, sondern es wurden mit Hilfe von 4 Meßuhren, von denen je 2 an den zueinander stehenden Schellenenden angebracht waren, gemessen. Der Abstand dieser Uhren von den Auflagerpunkten der Schellen betrug für alle 4 Uhren je 400 mm, sodaß sich die Drehwinkel selbst ergaben aus der abgelesenen Durchbiegung dividiert durch 400.

Für jeden Belastungsfall wurden an jeder Uhr 3 Ablesungen vorgenommen. Der aus ihnen gemittelte Wert wurde dann der weiteren Rechnung zugrunde gelegt. Durch die Anordnung der Meßuhren vorn und hinten wurde außerdem die Ungenauigkeit einer schiefen Auflagerung, die auf alle Fälle in mehr oder wenig großem Maße vorhanden ist, ausgeglichen. Die Resultate der aus den Durchbiegungsmessungen ermittelten Winkel sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Bestimmung des Wertes $E_2 J_0$ für das Versuchskabel.

Ein Einzelseil wurde wie in nachstehender Skizze dargestellt gelagert und einem Biegeversuch unterworfen, nachdem es vorher einige Male be- und entlastet wurde. Die Seilenden waren derart verschweißt, daß ein gegenseitiges Verschieben der einzelnen Drähte ausgeschlossen war.

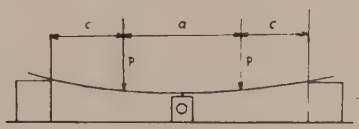

Abb. 20.

P_{kg}	Durchbiegungen in mm
0	9,0
2	14,76
0	9,70
2	14,76
0	9,70

$f = 5{,}06$ mm.

Der theoretische Wert für die Größe der Durchbiegung ergibt sich aus der bekannten Formel

$$\max f = \frac{P \cdot c}{E J 24}(3a^2 + c^2 + 12ac)$$

mit den Größen beim Versuch

$a = 61\,\text{cm}$ $\quad a^2 = 3721\,\text{cm}^2$

$c = 40\,\text{cm}$ $\quad c^2 = 1600\,\text{cm}^2$

$a.c = 61.40\,\text{cm}$ $\quad = 2440\,\text{cm}^2$

$P = 0{,}002\,\text{t}$ $\quad EJ = E_2 J_0$

$$f = \frac{2.10^{-3} \cdot 40}{E_2 J_0 \cdot 24}(11163 + 12800 + 29280) =$$

$$= \frac{10^{-2}}{E_2 J_0} \cdot \frac{53243}{3} = 177{,}48 \cdot \frac{1}{E_2 J_0}$$

$$\underline{E_2 J_0} = \frac{177{,}48}{0{,}506} = \underline{350\,\text{tcm}^2}$$

Zusammenstellung der Durchbiegungen.

e_{mm}	P_{kg}	δ_1	$\alpha \cdot 10^3$	δ_2	$\beta \cdot 10^3$
700	1000	+ 0,218	0.545	+ 0,319	+ 0,798
	2117	+ 0,431	1,078	+ 0,816	+ 2,040
	2961	+ 0,570	1,425	+ 1,389	+ 3,472
650	500	+ 0,033	+ 0,082	+ 0,230	+ 0,575
	1000	− 0,066	− 0,165	+ 0,375	+ 0,938
	2117	− 0,575	− 1,438	+ 1,439	+ 3,598
600	500	− 0,079	− 0,198	+ 0,344	+ 0,860
	1000	− 0,413	− 1,032	+ 1,010	+ 2,525
	2117	− 3.075	− 7,688	+ 4,793	+ 11,982
470	500	− 0,496	− 1,240	+ 0,791	+ 1,978
	1000	− 2,701	− 6,752	+ 3,530	+ 8,825
320	500	− 1,686	− 4,215	+ 2,048	+ 5,120
150	500	− 3,467	− 8,668	+ 4,003	+ 10,008

Auswertung der Formeln (64 a) und (65 a) S. 60 auf Grund der Versuchsergebnisse.

Setzt man die Gleichungen (74 a) und (75 a) für $E_1 = \mu . E$ schreibt zur Abkürzung

$$C_1 = \frac{E_1 F^2}{18 \pi l \varepsilon}$$

$$C_2 = \frac{4 E_2 J_0 \cdot n}{l}$$

so lauten die Gleichungen

$$M' = \alpha [\mu C_1 + C_2] + \beta \left[\mu C_1 - \frac{C_2}{2}\right]$$

und

$$M'' = \alpha \left[\mu C_1 - \frac{C_2}{2}\right] + \beta [\mu C_1 + C_2]$$

dabei darf, wie aus einer Reihe von Vergleichsrechnungen festgestellt wurde, $\mu = 0{,}21$ gesetzt werden.

Zahlenrechnung.

Gewicht des Einzelseiles $g = 2{,}70$ kg/m

Nettoquerschnitt $F_0 = \frac{2{,}70}{0{,}785} = 3{,}44$ cm²

Bruttoquerschnitt $\frac{d^2 \pi}{4} = \frac{2{,}2^2 \cdot \pi}{4} = 3{,}82$ cm²

Verhältniszahl $\varepsilon = \frac{3{,}44}{2{,}82} = 0{,}9$

Anzahl der Seile $n = 37$

Gesamtquerschnitt $n \cdot F_0 = 37 \cdot 3{,}44 = 127{,}3$ cm²

$F^2 = n^2 \cdot F_0^2 = 16\,200$ cm⁴

$E = 2\,100$ t/cm²

$l = 120$ cm

aus Versuchen $E_2 J_0 = 350$ tcm²

$$C_1 = \frac{2100 \cdot 16200}{18 \cdot 3{,}141 \cdot 120 \cdot 0{,}9} \left(5 - \frac{4}{37}\right) = 27\,200 \text{ tcm}$$

$$C_2 = \frac{4 \cdot 350 \cdot 37}{120} = 430 \text{ tcm}$$

$$\mu \cdot C_1 + C_2 = 0{,}21 \cdot 27200 + 430 = 5670 + 430 = \mathbf{6\,100}$$

$$\mu \cdot C_1 - \frac{C_2}{2} = 0{,}21 \cdot 27200 - 215 = 5670 - 215 = \mathbf{5\,455}$$

mit diesen Konstanten wird

$$M' = 6100\,\alpha + 5455\,\beta$$
$$M'' = 5455\,\alpha + 6100\,\beta$$

Belastungsfall	$\alpha \cdot 10^3$	$\beta \cdot 10^3$	$6100 \cdot \alpha$	$6100 \cdot \beta$	$5455 \cdot \alpha$	$5455 \cdot \beta$
1	+ 0,545	+ 0,798	+ 3,324	+ 4,868	+ 2,973	+ 4.353
2	+ 1,078	+ 2,040	+ 6.576	+ 12,444	+ 5,880	+ 11.128
3	+ 1,425	+ 3,472	+ 8,692	+ 21,179	+ 7,773	+ 18,940
4	+ 0,082	+ 0.575	+ 0,500	+ 3,508	+ 0.447	+ 3,137
5	− 0,198	+ 0.860	− 1.208	+ 5.246	− 1,080	+ 4,691
6	− 1,032	+ 2,525	− 6,295	+ 15.402	− 5,630	+ 13.774
7	− 1,240	+ 1,978	− 7,564	+ 12,066	− 6,764	+ 10,780
8	− 4.215	+ 5,120	− 25,712	+ 31,232	− 22.993	+ 27.930

Belastungsfall	M'	M''	P	e	$140 - e$	$P \cdot e$
1	+ 7,677	+ 7,841	1,000	70	70	70
2	+ 17,704	+ 18.324	2,117	70	70	148,19
3	+ 27.632	+ 28.952	2,961	70	70	207.27
4	+ 3,637	+ 3,955	0,500	65	75	32,50
5	+ 3,483	+ 4,166	0,500	60	80	30,00
6	+ 7,479	+ 9,772	1.000	60	80	60.00
7	+ 3,226	+ 5,302	0,500	47	93	23,50
8	+ 2,218	+ 8,239	0,500	32	108	16,00

Belastungsfall	$P(140-e)$	M'_{soll}	Fehler in v.H.	M''_{soll}	Fehler in v.H.
1	70	9,000	− 14,7	9,000	− 12,9
2	148,19	19,053	− 7	19,053	− 3,8
3	207,27	26,649	− 3,7	26,649	+ 8,7
4	37,50	4,178	− 12,9	4,821	− 17,9
5	40,00	3,857	− 9,7	5,143	− 19,0
6	80,00	7,714	− 3,0	10,286	− 5.0
7	46,50	3,021	+ 7,8	6,943	+ 18,7
8	54,00		65,6		97,3

$$M'_{Soll} = P \cdot \frac{e}{t} \cdot d \qquad M''_{Soll} = P\frac{t-e}{t} \cdot d$$

$d = 18$ cm

$t = 140$ cm

$$= P(t-e)\,0{,}12857$$
$$= P(140-e)\,0{,}12857$$

$$M'_{Soll} = P \cdot e\,\frac{18}{140} = P \cdot e \cdot 0{,}12857$$

In der Zusammenstellung wurden einige Versuchsreihen nicht mit aufgeführt, weil die Ergebnisse aus den Formeln als Differenz großer Zahlen zu unsicher waren. Diese großen Deformationen liegen aber auch in Wirklichkeit nicht mehr im Bereich der Möglichkeit.

Die aus den Formeln (64a) und (65a) errechneten Momente M' und M'' für das Kabelstück weichen im Mittel um

$$\frac{65{,}6 + 97{,}3}{16} = \frac{162{,}9}{16} = 10 \text{ v. H.}$$

von den wirklich im Versuch eingeführten ab, was die Richtigkeit der Formeln bestätigt. Zu berücksichtigen ist, daß auch beim Abmessen der Hebelarme für die Kräfte beim Versuch Ungenauigkeiten unvereinbar waren.

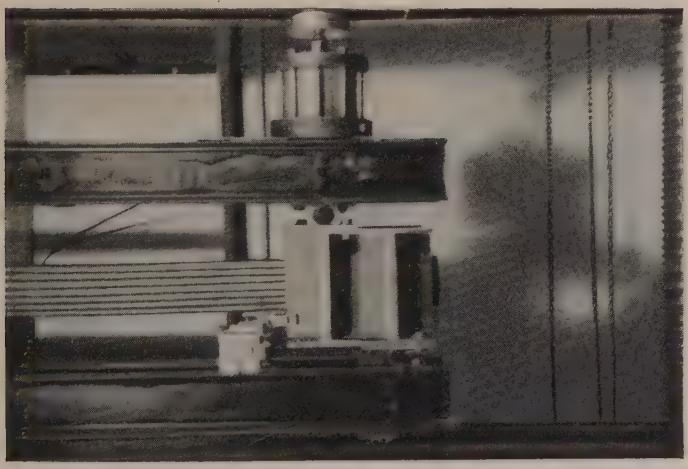

Abb. 21 a.

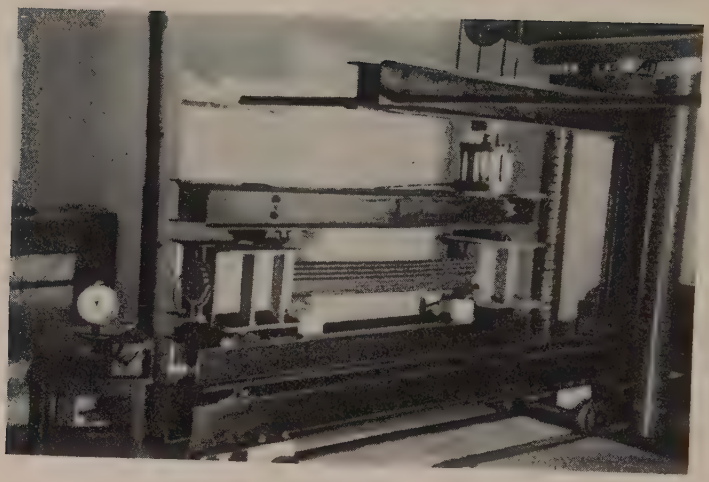

Abb. 21 b.

Abb. 21 c.

Schlußbemerkung.

Die auf S. 55 u. 57 eingetragenen Ergebnisse zeigen bedeutende Unterschiede für die verschiedenen Berechnungsverfahren. Es unterliegt keinem Zweifel, daß die aus den Clapeyronschen Gleichungen erhaltenen Werte gegenüber den in Wirklichkeit auftretenden bei weitem zu groß sind. Bemerkenswert ist jedenfalls der erhebliche Unterschied in den Spannungen, je nachdem man die Achsialkraft berücksichtigt oder nicht. Es ist auch klar, daß die Biegungsspannung bei gleichzeitig vorhandener Zugkraft an der Einspannstelle größer werden mußte, weil ja durch den Zug der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie verkleinert wird.

Auffallend ist der verhältnismäßig geringe Wert der Biegungsspannung, falls der Querschnitt kein kompakter, sondern wie in vorliegender Untersuchung angenommen, ein aufgelöster ist. Die angegebene Lösung würde sich unschwer auch auf ein aus parallelen Drähten bestehendes Kabel — amerikanische Bauweise — anwenden lassen. Man müßte sich dann den Querschnitt in eine Anzahl, vielleicht 8—10 Schichten, zerlegt denken und für jede Schicht den Querschnitt F_i als Funktion der Kreisfläche unter Berücksichtigung des Verhältnisses vom vollen Querschnitt zu den Hohlräumen einführen.

Für ein solches Kabel wurden beim Bau der Delaware River Bridge zwischen Camden und Philadelphia Versuche gemacht, über deren Ergebnis im „Report of the Delaware River Bridge Joint Commission 1923“ berichtet wird[1]).

Dort heißt es auf S. 21 in freier Übersetzung:

„Es wurden Versuche angestellt, um die Widerstandsfähigkeit gegen Biegung bei einem aus parallelen Drähten zusammengesetzten Kabel festzustellen. Wenn jedes Kabel ein kompakter Querschnitt wäre, würden die bei den auftretenden Winkelände-

[1]) S. auch Schachenmeier, Bautechnik 1927 S. 515 und Engineering News-Record 1926 Nr. 15 S. 580.

rungen entstehenden Biegungsspannungen sehr erheblich sein und seine Tragfähigkeit übersteigen. Dagegen ist jedes Kabel zusammengesetzt aus tausenden von Einzeldrähten, die mehr oder weniger frei aufeinander gleiten können und gemeinsam die Biegungslinie des Kabels mitmachen. Dadurch ist die Biegungsspannung begrenzt durch den Reibungswiderstand beim Gleiten zwischen den Drähten.

Aus 1904 verzinkten Drähten gleicher Stärke wie im Brückenkabel wurde ein Versuchskabel von 3,05 m Länge und etwa 25,4 cm ∅ hergestellt. Es wurde mit einem Hilfsdraht unter Anwendung einer bekannten Spannung umwickelt. Dieses Kabel wurde dann horizontal unter eine Prüfmaschine gebracht, in der Nähe der Enden unterstützt und in der Mitte belastet, wobei die Durchbiegungen in der Mitte gemessen wurden. Unter sehr kleinen Lasten waren die Durchbiegungen des Kabels ungefähr die gleichen, wie die für einen gleichwertigen steifen Balken theoretisch ermittelten. Bei wachsender Belastung jedoch wurden die Durchbiegungen verhältnimäßig groß, was darauf schließen läßt, daß Gleiten zwischen den einzelnen Drähten eintrat."

Aus den in der obigen Abhandlung weiter angeführten Ergebnissen geht zum mindesten hervor, daß die Durchbiegung eines aus Drähten bestehenden Kabels 15—45 mal größer ist, als die eines gleichwertigen Vollbalkens. Da aber die Durchbiegung ein Maß für die Größe der Steifigkeit darstellt, folgt daraus, daß ein solches Kabelstück erheblich biegsamer sein muß und somit einer Verformung durch Biegemomente bedeutend weniger Widerstand entgegensetzt, sodaß auch die dabei auftretenden Spannungen viel kleiner ausfallen werden.

Die größten Biegungsspannungen treten, wie bereits früher erwähnt, am Pylonenkopf bei halbseitiger Brückenbelastung auf, also dann, wenn der Horizontalzug im Kabel erst die Hälfte seines Größtwertes erreicht hat, sodaß also die Zusatzspannungen aus Biegung trotz des spröden Drahtmaterials zu ernsten Bedenken keinen Anlaß geben dürften, aber doch die eingangs betonte Würdigung der Nebenspannungen rechtfertigen.

Lebenslauf.

Ich wurde am 19. Januar 1891 in Paris geboren. Nach Besuch des Gymnasiums in München widmete ich mich dem Studium an der Bauingenieurabteilung der Technischen Hochschule München, wo ich im Jahre 1913 die Vordiplomprüfung bestand.

Nachdem ich im Jahre 1913/14 meiner Militärpflicht genügt hatte, rückte ich im August 1914 an die Front, wo ich Ende des ersten Kriegsjahres in russische Gefangenschaft geriet und erst nach siebenjähriger Internierung in Sibirien und Rußland am 8. November 1921 in die Heimat zurückkehren konnte.

An der Technischen Hochschule München setzte ich mein Studium fort und legte dort im Herbst 1923 die Hauptprüfung ab. Nach einjähriger Tätigkeit bei der Firma Beuchelt & Co. wurde mir von meinem ehemaligen Lehrer Prof. Dr. Schachenmeier eine Assistentenstelle an seinem Lehrstuhl angeboten, die ich im Frühjahr 1925 antrat. Während dieser Zeit arbeitete ich viel an Entwürfen und Untersuchungen über versteifte Hängebrücken mit und erhielt damals die Anregung zur Berechnung der Biegungsspannungen. Nach dem Tode von Prof. Schachenmeier hielt ich im Jahre 1927 vertretungsweise die Vorlesungen und Übungen aus Baustatik und Stahlbau ab und blieb nach der Übernahme des Lehrstuhls durch Prof. Kapsch noch ein Jahr als Assistent bei ihm.

Seit 1929 bin ich im Werk Stahlbau der Firma Christoph & Unmack in Schlesien tätig.